Diferenciaciones de Hasse-Schmidt y cuerpos de coeficientes: Una generalización de un teorema de H. Matsumura.*

Magdalena Fernández Lebrón   Luis Narváez Macarro

Abstract

We generalize the theorem 99 of [2] to the case of higher derivations of Hasse-Schmidt. The key point is a sufficient condition to express any higher derivation in terms of fixed ones.

Introducción

En esta nota extendemos el teorema 99 de [2] al caso de las diferenciaciones de Hasse-Schmidt. La idea principal se encuentra en el teorema 2.1, donde se da una condición suficiente para que toda diferenciación de Hasse-Schmidt pueda expresarse en función de una fijas. Nuestra motivación original se encuentra en la generalización de los resultados de [4] para el caso de un cuerpo base de característica $p > 0$.

1 Notación y preliminares

Todos los anillos y álgebras considerados son conmutativos y con elemento unidad. En primer lugar recordamos la noción de diferenciación o derivación de orden superior en el sentido de Hasse-Schmidt [1]:

Sean $k \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ homomorfismos de anillos. Sea t una indeterminada sobre B. Sean $B_m = B[t]/(t^{m+1})$ $(m \geq 0)$ y $B_\infty = B[[t]]$. Podemos considerar, de manera natural, a B_m $(m \leq \infty)$ como una k–álgebra.

Definición 1.1. En las condiciones anteriores, una sucesión $\underline{D} = (D_0, D_1, \ldots, D_m)$ de aplicaciones k–lineales $(D_i : A \longrightarrow B)$ se dice diferenciación de longitud m de A en B (sobre k) si se verifica:

$$D_0 = g \quad \text{y} \quad D_i(xy) = \sum_{r+s=i} D_r(x) D_s(y) \qquad (1 \leq i \leq m,\ x, y \in A).$$

Nota 1.2. Cuando $A = B$ y $g = 1_A$, entonces hablaremos simplemente de una k–diferenciación de A. A partir de ahora consideraremos este caso.

*Subvencionado por DGESIC PB97-0723.

Notaremos $HS_k(A,m)$ al conjunto de todas las k–diferenciaciones de longitud m de A, y $HS_k(A) = HS_k(A,\infty)$. Si no hay confusión sobre k, escribiremos $HS(A,m)$ y $HS(A)$, respectivamente.

Nota 1.3. Si $\underline{D}$ es una k–diferenciación de A, entonces $D_1 \in Der_k(A)$. Además, D_i es cero sobre $f(k)$ para $i > 0$.

Utilizaremos la siguiente notación para manejar n–uplas: Sean $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, y $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$. Entonces

1. $|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, y si $\underline{T} = (T_1, \dots T_n)$ entonces $\underline{X} + \underline{T} = (X_1 + T_1, \dots, X_n + T_n)$.

3. $\underline{X}^{\underline{\alpha}} = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

4. $\underline{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$.

5. En $\mathbb{N}^n$ definiremos el siguiente orden (parcial): $\underline{\alpha} \geq \underline{\mu}$ significa $\alpha_1 \geq \mu_1, \dots, \alpha_n \geq \mu_n$.

6. $\underline{\alpha} < \underline{\mu}$ si $\underline{\alpha} \leq \underline{\mu}$ y $\underline{\alpha} \neq \underline{\mu}$.

7. $\underline{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ y $\begin{pmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \mu_n \end{pmatrix}$ $\forall \underline{\alpha}, \underline{\mu} \in \mathbb{N}^n$.

8. Un elemento genérico de $k[[\underline{X}]]$ será de la forma $\displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n} \lambda_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}}$, y de $k[\underline{X}]$ será de la forma $\displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in I} \lambda_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}}$, donde I es un subconjunto finito de $\mathbb{N}^n$.

9. $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{X}}\right)^{\underline{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{\alpha_n}$.

Proposición 1.4. (Desarrollo de Taylor) *(ver [3]) Sea $A = k[[\underline{X}]]$ (ó $A = k[\underline{X}]$). Sean $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ otra indeterminada y $f(\underline{X}) = \displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n} \lambda_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}} \in A$. Definimos $\Delta^{(\underline{\alpha})}$ por: $f(\underline{X} + \underline{T}) = \displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n} \Delta^{(\underline{\alpha})}(f(\underline{X}))\underline{T}^{\underline{\alpha}}$. Entonces se tiene que*

1. *$\Delta^{(\underline{\alpha})}$ son k-lineales y además I–continuas.*

2. $$\Delta^{(\underline{\alpha})}(\underline{X}^{\underline{\beta}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{\beta} < \underline{\alpha} \\ \begin{pmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix} \underline{X}^{\underline{\beta} - \underline{\alpha}} & \text{si } \underline{\beta} \geq \underline{\alpha} \end{cases}$$

3. *$\Delta^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \Delta^{(\alpha_1, 0, \dots, 0)} \circ \Delta^{(0, \alpha_2, \dots, 0)} \circ \cdots \circ \Delta^{(0, \dots, 0, \alpha_n)}$ y además los $\Delta^{(0, \dots, \alpha_j, \dots, 0)}$ conmutan para todo $j = 1, \dots, n$.*

4. *$\Delta^{(0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)} = \frac{\partial}{\partial X_j}$ y $\underline{\alpha}! \Delta^{(\underline{\alpha})} = (\frac{\partial}{\partial X_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial X_n})^{\alpha_n}$.*

5. $\Delta^{(\underline{\alpha})} \circ \Delta^{(\underline{\beta})} = \left(\begin{array}{c} \underline{\alpha}+\underline{\beta} \\ \underline{\alpha} \end{array} \right) \Delta^{(\underline{\alpha}+\underline{\beta})}$ *y* $\Delta^{(\underline{\alpha})}(f \cdot g) = \sum_{\underline{\beta}+\underline{\sigma}=\underline{\alpha}} \Delta^{(\underline{\beta})}(f)\Delta^{(\underline{\sigma})}(g)$.

6. *Para todo* $j = 1, \ldots, n$, $i \geq 0$ *notaremos* $\Delta^{(0,\ldots,\overset{(j)}{i},\ldots,0)} = \Delta^j_i$. *Entonces* $\underline{\Delta}^j = (\Delta^j_1, \Delta^j_2, \ldots) \in HS_k(A)$ *para* $j = 1, \ldots, n$ *y además son iterativas. Por último también se verifica que* $i!\Delta^j_i = (\Delta^j_1)^i$, *para todo* $j = 1, \ldots, n$ *y para todo* $i \geq 0$.

Proposición 1.5. *Si* $\underline{D} = (D_0, D_1, \ldots) \in HS_k(A)$, *entonces para todo* i, *las* D_i *son operadores diferenciales de orden* i *y por tanto* I*–continuas para todo* I *ideal de* A.

Proposición 1.6. *Si* $\underline{D} = (D_0, D_1, \ldots) \in HS_k(A)$, *entonces existe un única extensión* $\widehat{\underline{D}} \in HS_k(\hat{A})$, *(siendo* $\hat{A}$ *el completado de* A *para la topología* I*–ádica).*

2 La generalización

En primer lugar probaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Sea* k *un anillo y* R *una* k*–álgebra. Sean* $\underline{\mathfrak{D}}, \underline{D}^1, \ldots \underline{D}^n \in HS_k(R)$

- *Si* $\{D^1_1, \ldots, D^n_1\}$ *es un sistema generador de* $Der_k(R)$ *como* R*–módulo, entonces existen* n *sucesiones* $\{C_{ld}\}_{l\in\mathbb{N}}$, $(1 \leq d \leq n)$ *de elementos de* R, *tales que:*

$$\mathfrak{D}_i = \sum_{m=1}^{i} \left(\sum_{\substack{|\underline{i}|=i,\ |\underline{m}|=m \\ i_d \geq m_d \geq 0}} \prod_{d=1}^{n} \sum_{\substack{l_1^d+\cdots+l_{m_d}^d=i_d \\ l_q^d \geq 1}} \prod_{q=1}^{m_d} C_{l_q^d d} \right) D_{\underline{m}}, \ \forall i \geq 1; \qquad (1)$$

donde convenimos

$$D_{\underline{m}} = D^1_{m_1} \circ \cdots \circ D^n_{m_n}, \ \forall \underline{m} \in \mathbb{N}^n \quad y \quad \sum_{\substack{l_1^d+\cdots+l_{m_d}^d=i_d \\ l_q^d \geq 1}} \prod_{q=1}^{m_d} C_{l_q^d d} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ m_d = 0 < i_d \\ 1 & si\ m_d = i_d = 0 \end{array} \right.$$

- *Si* $\{D^1_1, \ldots, D^n_1\}$ *es una base de* $Der_k(R)$, *entonces los* $\{C_{ld}\}$ *son únicos.*

Demostración. (Idea) La prueba se hace por inducción sobre i: Supongamos que $\{D^1_1, \ldots, D^n_1\}$ es una R–base de $Der_k(R)$ (en el caso de que sea sistema de generadores la dem. es igual, pero no se tiene la unicidad de los C_{ld}).
Para $i = 1$: $\mathfrak{D}_1$ es derivación, entonces existen unos únicos $C_{11}, \ldots, C_{1n} \in R$ tales que $\mathfrak{D}_1 = C_{11}D^1_1 + \cdots + C_{1n}D^n_1$.

Supongamos construidos $C_{ld} \in R$, $1 \le l \le N-1$, $1 \le d \le n$ tales que se verifica 1 para $1 \le i \le N-1$. Todo consiste en probar que

$$\mathfrak{D}_N - \sum_{m=2}^{N} \left(\sum_{\substack{|\underline{N}|=N, |\underline{m}|=m \\ N_d \ge m_d \ge 0}} \prod_{d=1}^{n} \sum_{\substack{l_1^d+\cdots+l_{m_d}^d=N_d \\ l_q^d \ge 1}} \prod_{q=1}^{m_d} C_{l_q^d d} \right) D_{\underline{m}}$$

es una k–derivación, y de nuevo por ser $\{D_1^1, \ldots, D_1^n\}$ una R–base de $Der_k(R)$, existen unos únicos $C_{N1}, \ldots, C_{Nn} \in R$ que cumplen lo pedido. Esto se prueba tras una minuciosa manipulación de los sumatorios y productos involucrados, así como de la relación

$$D_{\underline{m}}(a \cdot b) = \sum_{\underline{r}+\underline{s}=\underline{m}} D_{\underline{r}}(a) D_{\underline{s}}(b).$$

□

Nota 2.2. En el caso $n = 1$, si $\underline{D} \in HS_k(R)$ tal que D_1 es un generador como R–módulo de $Der_k(R)$, entonces dada otra $\underline{\mathfrak{D}} \in HS_k(R)$, existe un $\underline{c} \in R^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\mathfrak{D}_i = \sum_{m=1}^{i} (\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=i \\ l_q \ge 1}} \prod_{q=1}^{m} c_{l_q}) D_m$$

y notaremos $\underline{\mathfrak{D}} = \underline{c} \star \underline{D}$. Luego podemos considerar $\star$ como una "nueva" operación, que juega un papel análogo a la estructura de R–módulo sobre $Der_k(R)$.

Proposición 2.3. *Sea A dominio de integridad y consideremos las extensiones $k_0 \subset k \subset A$, con $k_0 \subset k$ formalmente étale. Sea $\underline{D} \in HS_{k_0}(A,\ B)$. Entonces $D_i(k) = 0$, para todo $i > 0$.*

Demostración. Consideremos $k_0 \overset{i}{\hookrightarrow} k \xrightarrow{f} A \xrightarrow{1_A} A$ homomorfismos de anillos. Sea t una indeterminada sobre A. Sean $A_m = A[t]/(t^{m+1})$ con $m \ge 0$ y $A_\infty = A[[t]]$. Podemos considerar, de manera natural, a A_m ($m \le \infty$) como una k–álgebra, y en particular como una k_0–álgebra. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{f} & A = \frac{A[t]}{(t)} \\ \uparrow i & E_t \searrow\!\!\searrow \varphi & \uparrow j \\ k_0 & \xrightarrow{h} & A_{m+1} = \frac{A[t]}{(t^{m+2})} \end{array}$$

donde h, j son las aplicaciones naturales, y E_t y φ dos levantamientos que hacen conmutativos ambos diagramas siendo $E_t : k \longrightarrow A_{m+1}$ definida por $E_t(\lambda) = \lambda + D_1(\lambda)t + \cdots + D_{m+1}(\lambda)t^{m+1}$, y φ la aplicación natural. Pero al ser $k_0 \subset k$ formalmente étale, sabemos que el levantamiento es único y entonces se tiene $D_1(\lambda) = \cdots = D_{m+1}(\lambda) = 0$. Por último, podemos levantar f sucesivamente a $k \longrightarrow A[[t]]$ y se tiene $D_i(k) = 0$ para todo $i \ge 1$. □

Veamos a continuación el teorema que generaliza al teorema 99 de [2], cuya demostración, sigue el esquema de la dada en [2] (pues la extensión de las diferenciaciones al completado es posible gracias a que son I–continuas, véase 1.5 y 1.6). Sin embargo, mientras que las derivaciones forman base, en $HS_{k_0}(R)$ esto no tiene en principio un sentido claro. No obstante, podemos "expresarlas" unas en función de otras como se ha visto en 2.1.

Teorema 2.4. *Sea $(R,\mathfrak{m})$ anillo noetheriano, local, regular, de dimensión n, equicaracterístico de característica $p>0$. Sea k_0 un cuerpo de casi-coeficientes de R (es decir, $R/\mathfrak{m}$ es formalmente étale sobre k_0, ver* 38.*F de [2]). Sea $\widehat{R}$ el completado de R y k el cuerpo de coeficientes de $\widehat{R}$ que contiene a k_0. Sea $X_1,\dots,X_n$ un sistema regular de parámetros de R y por tanto, $\widehat{R}=k[[X_1,\dots,X_n]]$. Sean $\underline{\Delta}^1,\dots,\underline{\Delta}^n\in HS_k(\widehat{R})$ las definidas en* 6 *de 1.4. Entonces son equivalentes:*

1. *$\Delta_i^j(R)\subset R$, $\forall j$, $\forall i$.*
2. *Existen $\underline{D}^1,\dots,\underline{D}^n\in HS_{k_0}(R)$ y $a_1,\dots,a_n\in R$ tales que*

$$D_i^j(a_k)=\begin{cases}0 & i\geq 2,\ \forall j\\ 1 & i=1,\ k=j\\ 0 & i=1,\ k\neq j\end{cases}$$

Demostración.
$1\Longrightarrow 2$: Trivial tomando $\underline{D}^j=\underline{\Delta}^j$ y $a_k=X_k$ para $k,j=1,\dots,n$.
$2\Longrightarrow 1$: Por 2 tenemos que existen $D_1^1,\dots,D_n^n\in Der_{k_0}(R)$ y $a_1,\dots,a_n\in R$ tales que $D_i^j(a_k)=\delta_{ik}$. Luego por tma 99 de [2] ($2\Rightarrow 4$), se tiene que $Der_{k_0}(R)$ es un R–módulo libre de rango n de base $\{D_1^1,\dots,D_1^n\}$. Por tanto, sus extensiones al completado $\{\widehat{D}_1^1,\dots,\widehat{D}_1^n\}$, forman una $\widehat{R}$–base de $Der_k(\widehat{R})$. Aplicando 2.1 a $\widehat{R}$ y $\underline{\Delta}^1,\dots,\underline{\Delta}^n\in HS_k(\widehat{R})$, sabemos que existen unos únicos $\{C_{ld}^j\}_{l\in\mathbb{N}}$ $(1\leq j,d\leq n)$ elementos de $\widehat{R}$ tales que:

$$\Delta_i^j=\sum_{m=1}^{i}\sum_{\substack{|\underline{i}|=i,|\underline{m}|=m\\ i_d\geq m_d\geq 0}}\left(\prod_{d=1}^{n}\sum_{\substack{l_1^d+\cdots+l_{m_d}^d=i_d\\ l_q^d\geq 1}}\prod_{q=1}^{m_d}C_{l_q^d d}^j\right)\widehat{D}_{\underline{m}}.$$

Sabemos que los $C_{1d}^j\in R$ para $d,\ j=1,\dots,n$ (ver en [2] la prueba del tma 99, $5\Rightarrow 1$). Por tanto $\Delta_1^j(R)\subseteq R$. Supongamos que para todo $l<i$, $C_{l1}^j,\dots,C_{ln}^d\in R$, con $i\geq 2$. Veamos si $C_{i1}^j,\dots,C_{in}^j\in R$: Se tiene que

$$\Delta_i^j(X_j)-\sum_{m=2}^{i}\sum_{\substack{|\underline{i}|=i\\ |\underline{m}|=m\\ \underline{i}\geq\underline{m};\ i_t,m_t\geq 0}}(\prod_{d=1}^{n}\sum_{\substack{l_1^d+\cdots+l_{m_d}^d=i_d\\ l_q^d\geq 1}}\prod_{q=1}^{m_d}C_{l_q^d d}^j)(\widehat{D}_{m_1}^1\circ\cdots\circ\widehat{D}_{m_n}^n)(X_j)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}C_{im}^j\widehat{D}_1^m(X_j).$$

Aplicando hipótesis de inducción se tiene claramente que el segundo término pertenece a R. Ahora bien, como $\widehat{D}_1^m = \sum_{s=1}^{n} D_1^m(X_s)\frac{\partial}{\partial X_s}$, $m = 1, \ldots, n$ y $\{\widehat{D}_1^1, \ldots, \widehat{D}_1^n\}$ forman una $\widehat{R}$–base de $Der_k(\widehat{R})$, la matriz $(D_1^m(X_s))$ tiene determinante inversible en $\widehat{R}$, y por tanto en R (pues $R \subseteq \widehat{R}$ es fielmente plana). Luego los $C_{im}^j \in R$ para todo $i \geq 1$, $m, j = 1, \ldots, n$, y entonces se tiene que para todo $j = 1, \ldots, n$ y todo $i \geq 1$ $\Delta_i^j(R) \subseteq R$. □

Teorema 2.5. *Sea $(R, \mathfrak{m})$ anillo noetheriano, local, regular, de dimensión n, equicaracterístico de característica $p > 0$. Sea k_0 un cuerpo de casi–coeficientes de R. Sean $\underline{D}^1, \ldots, \underline{D}^n \in HS_{k_0}(R)$ tales que existen $a_1, \ldots, a_n \in R$ verificando que*

$$D_i^j(a_k) = \begin{cases} 0 & i \geq 2, \ \forall j \\ 1 & i = 1, \ k = j \\ 0 & i = 1, \ k \neq j \end{cases}$$

Sean $\widehat{\underline{D}}^1, \ldots, \widehat{\underline{D}}^n$ las extensiones de $\underline{D}^1, \ldots, \underline{D}^n$ a $\widehat{R}$. Entonces

$$\{a \in \widehat{R} \mid \widehat{D}_i^j(a) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n, \ i \geq 1\}$$

es un cuerpo de coeficientes de $\widehat{R}$ (el único que contiene a k_0).

Demostración. Sea $\widehat{R}$ el completado de R y k el único cuerpo de coeficientes de $\widehat{R}$ que contiene a k_0 (ver teorema 91 de [2]). Sea $X_1, \ldots, X_n$ un sistema regular de parámetros de R, entonces $\widehat{R} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Sean $\underline{\Delta}^1, \ldots, \underline{\Delta}^n \in HS_k(\widehat{R})$ las definidas en 6 de 1.4, entonces

$$k = \{a \in \widehat{R} \mid \Delta_i^j(a) = 0 \quad j = 1, \ldots, n; \ i \geq 1\}.$$

Razonando como en la proposición anterior 2.4, $\{\widehat{D}_1^1, \ldots, \widehat{D}_1^n\}$, forman una $\widehat{R}$–base de $Der_k(\widehat{R})$ y aplicando 2.1 a $\widehat{R}$, sabemos que los Δ_i^j se pueden poner en función de los $\widehat{D}_i^j$. Por tanto, donde se anulan los $\widehat{D}_i^j$, se anulan los Δ_i^j, es decir

$$\{a \in \widehat{R} \mid \widehat{D}_i^j(a) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n, \ i \geq 1\} \subset k.$$

Por otro lado, como k_0 es un cuerpo de casi–coeficientes de R, $k_0 \subset k$ es formalmente étale. Además $\widehat{D}_i^j$ $(i \geq 1)$ se anulan en los elementos de k_0, puesto que son las extensiones de D_i^j. Luego aplicando 2.3, se tiene que $\widehat{D}_i^j$ se anulan en los elementos de k, y por tanto se tiene la otra inclusión. □

References

[1] Hasse, H. and Schmidt, F. K., Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differrentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkorper einer Unbestimmten, *J. reine u. angew. Math.,* 177 (1937), 223 – 239.

[2] MATSUMURA, H., *Commutative Algebra,* 2nd edition (Benjamin & Cummings, 1980).

[3] MOUNT,K.; VILLAMAYOR, O. E., Taylor series and higher derivations, *Universidad de Buenos Aires, n*§ 18.

[4] NARVAÉZ, L. , A note on the behaviour under a ground field extension of quasicoefficient fields, *J. London Math.Soc.*(2) 43 (1991), $12-22$.

Magdalena Fernández Lebrón, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, P.O. Box 1160, 41080 Sevilla; Luis Narváez Macarro, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, P.O. Box 1160, 41080 Sevilla.