Un algoritmo para detectar módulos proyectivos

Jesús Gago-Vargas*

Abstract

Let R be a ring where we can compute Gröbner bases and every f.g. left R-module has a Finite Free Resolution (FFR). Let M be a f.g. left R-module given as subset of a free module. In this paper we give an algorithm for testing projectivity and to compute its rank.

Introducción

Partimos de un anillo R, no necesariamente conmutativo, en el que todo módulo a izquierda tiene una resolución libre finita, que podemos calcular, y que dado M un submódulo a derecha de R^k definido por sus generadores, existe un procedimiento para determinar si es igual a todo R^k. Ambos procesos se basan en el cálculo de bases de Gröbner en R. Estas son las únicas condiciones que usaremos para determinar el carácter proyectivo de un módulo a izquierda, que podemos encontrar en algunas álgebras PBW ([1]), como el plano cuántico $k_q[x_1, x_2]$ o A_n ([5]). En el caso conmutativo, existe un conocido procedimiento para determinar el carácter proyectivo de un módulo basado en el cálculo de los ideales de Fitting ([2]). Cuando R es no conmutativo no tenemos, en general, tales conceptos. Aprovechamos entonces una caracterización apuntada en [3], basada en una resolución libre del módulo. Sabemos que la existencia de resolución libre finita para un módulo proyectivo es equivalente al carácter establemente libre del mismo ([4]). Con el algoritmo que describimos a continuación determinamos si M es proyectivo o no, y si lo es encontramos un isomorfismo $M \oplus R^s \simeq R^t$ para ciertos s, t. El proceso es por inducción sobre la longitud de la resolución. Vamos a identificar los morfismos con sus matrices por comodidad en la notación.

1 Criterio de proyectividad.

Supongamos que una resolución libre de M viene dada por

$$0 \to F_1 \stackrel{A_1}{\to} F_0 \stackrel{A_0}{\to} M \to 0$$

con $\mathrm{rank}(F_i) = r_i$. Si M es proyectivo, esta sucesión es 'split', por lo que existe $B_1 : F_0 \to F_1$ tal que $B_1 A_1 = I_{r_1}$. La existencia de esta matriz es verificable a partir de las filas de A_1: consideradas como vectores de F_1, el R-módulo **a derecha** tiene que ser igual a F_1.

*Parcialmente subvencionado por DGESIC y FQM-218

Expresando cada vector de la base canónica de F_1 como combinación lineal de las filas de A_1, tenemos la matriz B_1. En tal caso, podemos dar el isomorfismo $F_1 \oplus \ker(B_1) \simeq F_0 \simeq F_1 \oplus M$, y tenemos una base de $F_1 \oplus \ker(B_1)$.
Consideremos entonces una resolución libre finita de M

$$0 \to F_t \xrightarrow{A_t} F_{t-1} \xrightarrow{A_{t-1}} F_{t-2} \xrightarrow{A_{t-2}} F_{t-3} \xrightarrow{A_{t-3}} \dots \xrightarrow{A_1} F_0 \xrightarrow{A_0} M \to 0$$

con $\operatorname{rank}(F_i) = r_i$ y $t \geq 2$ (tomamos A_{-1} la aplicación nula). Si M es proyectivo, entonces la sucesión exacta corta

$$0 \to \ker(A_0) \to F_0 \to M \to 0$$

es 'split', por lo que $\ker(A_0) = \operatorname{im}(A_1)$ es proyectivo. Por inducción, los módulos $\operatorname{im}(A_i)$, $i = 1, \dots, t$ son proyectivos. En particular, $\operatorname{im}(A_{t-1})$ lo es y la sucesión exacta

$$0 \to F_t \xrightarrow{A_t} F_{t-1} \xrightarrow{A_{t-1}} \operatorname{im}(A_{t-1}) \to 0$$

es 'split'. Por tanto, existe $B_t : F_{t-1} \to F_t$ tal que $I_{r_t} = B_t A_t$. Entonces $\ker(B_t)$ es proyectivo (es isomorfo a $\operatorname{im}(A_{t-1})$), y podemos calcular el isomorfismo $\ker(B_t) \oplus F_t \simeq F_{t-1}$.
Consideremos la siguiente sucesión:

$$0 \to F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_t} F_{t-1} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-1}} F_{t-2} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-2}} F_{t-3} \xrightarrow{A_{t-3}} \dots \xrightarrow{A_1} F_0 \xrightarrow{A_0} M \to 0$$

donde

$$\widetilde{A}_t(\mathbf{v}_t) = (A_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{0}), \widetilde{A}_{t-1}(\mathbf{v}_{t-1}, \mathbf{v}_t) = (A_{t-1}(\mathbf{v}_{t-1}), \mathbf{v}_t), \widetilde{A}_{t-2}(\mathbf{v}_{t-2}, \mathbf{v}_t) = A_{t-2}(\mathbf{v}_{t-2})$$

Se trata de una sucesión exacta, y de nuevo $\operatorname{im}(\widetilde{A}_{t-1})$ es proyectivo. Como antes, la sucesión

$$0 \to F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_t} F_{t-1} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-1}} \operatorname{im}(\widetilde{A}_{t-1}) \to 0 \tag{1}$$

es 'split' y existe $\widetilde{B}_t : F_{t-1} \oplus F_t \to F_t$ tal que $I_{r_t} = \widetilde{B}_t \widetilde{A}_t$. Concretamente,

$$\widetilde{B}_t = \begin{pmatrix} B_t & \theta \end{pmatrix}$$

donde θ es la matriz nula de orden $r_t \times r_t$. Entonces $\widetilde{B}(\mathbf{v}_{t-1}, \mathbf{v}_t) = B_t(\mathbf{v}_{t-1})$, por lo que $\ker(\widetilde{B}_t) = \ker(B_t) \oplus F_t \simeq F_{t-1}$. Podemos calcular entonces

$$\widetilde{V}_{t-1} : F_{t-1} \to \ker(\widetilde{B}_t)$$

isomorfismo. Sea

$$\widetilde{C}_{t-1} = \widetilde{A}_{t-1} \widetilde{V}_{t-1} : F_{t-1} \to F_{t-2} \oplus F_t.$$

Veamos que la sucesión

$$0 \to F_{t-1} \xrightarrow{\widetilde{C}_{t-1}} F_{t-2} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-2}} F_{t-3} \xrightarrow{A_{t-3}} \dots \xrightarrow{A_1} F_0 \xrightarrow{A_0} M \to 0$$

es exacta. Como la sucesión (1) es 'split', $\widetilde{A}_{t-1}$ induce un isomorfismo entre $\ker(\widetilde{B}_t)$ y $\operatorname{im}(\widetilde{A}_{t-1})$, por lo que $\widetilde{C}_{t-1}$ es un isomorfismo entre F_{t-1} y $\operatorname{im}(\widetilde{A}_{t-1}) = \ker(\widetilde{A}_{t-2})$. Tenemos entonces el carácter exacto de la sucesión. Aplicamos de nuevo el proceso a $\widetilde{C}_{t-1}$ para determinar el carácter proyectivo de M.

Algoritmo 1.1. Test de proyectividad de un módulo. Entrada: un módulo M definido por sus generadores en R^r. Salida: si M es proyectivo o no. Si lo es, se da también su rango y un isomorfismo $M \oplus R^s \simeq R^t$.

1. Calcula una resolución libre finita de M
$$0 \to F_t \xrightarrow{A_t} F_{t-1} \xrightarrow{A_{t-1}} F_{t-2} \xrightarrow{A_{t-2}} F_{t-3} \xrightarrow{A_{t-3}} \dots \xrightarrow{A_1} F_0 \xrightarrow{A_0} M \to 0$$
2. Si A_t no tiene inversa a izquierda, M no es proyectivo. FIN.
3. En otro caso, sea B_t tal matriz. Si $t = 1$, M es proyectivo y $M \oplus F_1 \simeq \ker(B_1) \oplus F_1 \simeq F_0$. Si $t > 1$, calculamos la sucesión exacta
$$0 \to F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_t} F_{t-1} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-1}} F_{t-2} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-2}} F_{t-3} \xrightarrow{A_{t-3}} \dots \xrightarrow{A_1} F_0 \xrightarrow{A_0} M \to 0$$
y la matriz $\widetilde{V}_{t-1}$ del isomorfismo $\ker(B_t) \oplus F_t \simeq F_{t-1}$.
4. Sea $\widetilde{C}_{t-1} = \widetilde{A}_{t-1}\widetilde{V}_{t-1}$ y aplicamos el paso (1) a la resolución libre
$$0 \to F_{t-1} \xrightarrow{\widetilde{C}_{t-1}} F_{t-2} \oplus F_t \xrightarrow{\widetilde{A}_{t-2}} F_{t-3} \xrightarrow{A_{t-3}} \dots \xrightarrow{A_1} F_0 \xrightarrow{A_0} M \to 0.$$

References

[1] J.L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas, F.J. Lobillo, F.J. Castro, An introduction to effective calculus in quantum groups. Rings, Hopf algebras, and Brauer groups (Antwerp/Brussels, 1996), 55–83, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 197, Dekker, New York, 1998.

[2] D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] A. Logar and B. Sturmfels, Algorithms for the Quillen-Suslin theorem, *J. Algebra*, **145** (1992), 231–239.

[4] J.C. McConnell and J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience Publication, (John Wiley & Sons Ltd., 1987).

[5] J.T. Stafford, Weyl Algebras are stably free, *J. Algebra*, **48** (1977), 297–304.

Jesús Gago-Vargas
Dpto. de Álgebra, Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas, aptdo. 1160
41080 Sevilla
e-mail: `gago@algebra.us.es`