Sucesiones de puntos buenos

Granja Barón, A. Rodríguez Sánchez, C.

Abstract

In this paper we study the evolution by quadratic transforms of Abhyankar's good points. In fact, we determine the minimal number of quadratic transforms to convert a good point into a bad point, when this is possible.

Introducción

Con esta breve nota queremos iniciar el estudio de la evolución de puntos buenos de una superficie por transformaciones cuadráticas con la idea de obtener información sobre la estructura de la singularidad de la superficie.

El prototipo de punto bueno lo proporciona una ecuación como

$$Z^d - fX^aY^b$$

con f una unidad y $\overline{a}+\overline{b} < d \leq a+b$, siendo $\overline{a}$ y $\overline{b}$ la reducción módulo d de a y b, respectivamente. Por tanto, la tripleta (d, a, b) determina de forma combinatoria la singularidad de la superficie.

Nosotros estamos interesados en estudiar aquellas transformaciones cuadráticas que son olvidadas en la resolución de la singularidad. Nótese que realizando transformaciones monoidales con centros en las rectas $Z = 0,\ X = 0$ y $Z = 0,\ Y = 0$ se reduce la multiplicidad de la superficie.

El otro tipo de transformaciones que no dan lugar a bajar la multiplicidad son transformaciones cuadráticas en la dirección del contacto maximal dado por la ecuación $Z = 0$. Es decir, localmente dadas por $Z = Z'X',\ X' = X,\ Y = (Y'+\beta)X'$ o $Z = Z'Y',\ X = (X+\alpha)'Y',\ Y = Y'$, con α y β elementos del cuerpo de coeficientes.

Estas transformaciones se traducen de forma sencilla a transformaciones sobre la tripleta (d, a, b), (ver sección 1, más abajo) y permite estudiar el número mínimo que transforma el punto bueno inicial en uno malo, supuesto que fuera posible.

De forma más concreta, en la sección 2, probamos que utilizando transformaciones con $\alpha = \beta = 0$, dicho número mínimo (llamado más adelante la bondad del punto) está controlado por la sucesión de Fibonacci clásica, dada por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$, para $n \geq 2$. (ver Teorema 2.6 y Corolario 2.7).

1 Notaciones y preliminares

En lo que sigue $\mathbb{Z}$ denotará el conjunto de los números enteros y $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los números enteros positivos.

Sea $d \in \mathbb{Z}_+$, $d \geq 2$, fijo. Para cada $a \in \mathbb{Z}_+$ denotaremos por $p_d(a)$ o simplemente $p(a)$ el resto de a módulo d, es decir $a \equiv p(a) \pmod{d}$.

Para $i \in \{0,1,2\}$ consideraremos las funciones $f_i^d : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, dadas por:

$$f_0^d(a,b) = (a+b-d, 0),\ f_1^d(a,b) = (a+b-d, a),\ f_2^d(a,b) = (a+b-d, b),$$

para cada $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Nótese que f_0^d corresponde a la transformación $Z = Z'X'$, $X = X'$, $Y = (Y'+\beta)X'$ ó $Z = Z'Y'$, $X = (X+\alpha)Y'$, $Y = Y'$ con α y β inversibles; f_1^d se corresponde con la transformación $Z = Z'X'$, $X = X'Y'$, $Y = Y'$ y f_2^d con $Z = Z'X'$, $X = X', Y = Y'X'$.

Denotaremos por $\mathcal{F}_d = \{f_0^d, f_1^d, f_2^d\}$ y $\mathcal{F}'_d = \{f_1^d, f_2^d\}$. Llamaremos conjunto de transformaciones cuadráticas iteradas relativas a d al conjunto

$$\Lambda(d,a,b) = \{f \ / \ f = f_n \circ \cdots \circ f_1,\ \text{con } f_i \in \mathcal{F}_d,\ f(a,b) = (a',b') \in \mathbb{Z}_+^2,\ \text{con } a'+b' \geq d\}$$

y consideraremos el subconjunto formado por las transformaciones iteradas

$$\Lambda'(d,a,b) = \{f \ / \ f = f_n \circ \cdots \circ f_1,\ \text{con } f_i \in \mathcal{F}'_d\ f(a,b) = (a',b') \in \mathbb{Z}_+^2 \text{ con } a'+b' \geq d\}.$$

Recordemos que la sucesión de Fibonacci, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, se define de forma recurrente como $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$, con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Su término general a_n, viene dado por la expresión $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$ con $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lema 1.1. *Con la notación anterior, dada $f \in \Lambda(d)$, con $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$, se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $f_i = f_1^d$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces*

$$f(a,b) = (a_{n+1}a + a_n b - (a_{n+2}-1)d, a_n a + a_{n-1} b - (a_{n+1}-1)d).$$

2. *Si $f_1 = f_2^d$ y $f_i = f_1^d$, para $i = 2, \cdots, n$, entonces*

$$f(a,b) = (a_n a + a_{n+1} b - (a_{n+2}-1)d, a_{n-1} a + a_n b - (a_{n+1}-1)d).$$

3. *Si $f_i = f_2^d$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces $f(a,b) = (a + n(b-d), b)$.*

4. *Si $f_i = f_0^d$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces $f(a,b) = (a+b-nd, 0)$.*

Donde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ denota la sucesión de Fibonacci.

Demostración. Es un simple ejercicio utilizando inducción. □

2 Sucesiones minimales de puntos buenos

En lo que sigue, mantendremos las notaciones de la sección anterior.

Definición 2.1. Diremos que un par $(a, b) \in \mathbb{Z}_+^2$ es **bueno** respecto a d, o simplemente **bueno**, si verifica que $a+b \geq d > p_d(a)+p_d(b)$ y diremos que es **malo** si $p_d(a)+p_d(b) \geq d$.

Definición 2.2. Dada $f \in \Lambda(d, a, b)$, llamaremos **longitud** de f a $n(f) \in \mathbb{Z}_+$ tal que existen $f_1, \cdots, f_{n(f)} \in \mathcal{F}_d$ con $f = f_{n(f)} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ y para cada $0 \leq m < n(f)$ y cada $m-$tupla $(f'_1, \cdots, f'_m)$ con $f'_i \in \mathcal{F}_d$ se tiene que $f \neq f'_m \circ \cdots f'_1$.

Si el par (a, b) es bueno respecto a d, llamaremos **bondad** del par (a, b) respecto a d a

$$\beta(d, a, b) = \min\{n(f) \in \mathbb{Z}_+ / \ f(a, b) \text{ es malo respecto a } d\},$$

si existe alguna $f \in \Lambda(d)$ tal que $f(a, b)$ es malo. En caso contrario, pondremos $\beta(d, a, b) = +\infty$.

Lema 2.3. *Si $f \in \Lambda(d, a, b)$ es tal que $n(f) = \beta(d, a, b) = n$ y $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$, $f_1(a, b) = (a', b')$, entonces $\beta(d, a', b') + 1 = \beta(d, a, b)$. También $n(f_n \circ \cdots \circ f_2) = n - 1$.*

Lema 2.4. *Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}_+$, con $d \geq 2$. Si $a+b \geq d$ y $r = \left[\dfrac{a+b}{d}\right]$, entonces $(f_0^d)^r \notin \Lambda(d)$. Además, $(f_0^d)^k \in \Lambda(d)$, y $(f_0^d)^k(a, b)$ es bueno respecto a d, para todo $0 < k < r$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que $(f_0^d)^k(a, b) = (a + b - kd, 0)$ Así, si $0 < k < r$ es $p_d(a + b + kd) = p_d(a + b) < d$ y para $k = r$ es $a + b - rd < d$. □

Lema 2.5. *En las condiciones anteriores, si (a, b) es bueno respecto a d, entonces $\beta(d, a, b) = +\infty$ sí, y sólo si, $p_d(a) = p_d(b) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $p_d(a) \neq 0$, entonces tomando $f^n = (f_1^d)^n$, $n > 0$ se tiene que

$$f^n(a, b) = (a_{n+1}a + a_n b - (a_{n+2} - 1)d, a_n a + a_{n-1}b - (a_{n+1} - 1)d) = (a', b').$$

Ahora, si $f^{n-1}(a, b)$ es bueno respecto a d, tenemos

$$p_d(a') + p_d(b') = p_d(a_{n+1}a + a_n b) + p_d(a_n a + a_{n-1}b) = a_{n+2}p_d(a) + a_{n+1}p_d(b).$$

Como la sucesión de Fibonacci es creciente, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a_{n+2}p_d(a)+a_{n+1}p_d(b) \geq d$, en contra de que $\beta(d, a, b) = +\infty$.

Recíprocamente, si $p_d(a) = 0 = p_d(b)$ y $f_i^d(a, b) = (a', b')$, basta notar que $p_d(a') = p_d(b') = 0$, para $i = 0, 1, 2$. □

Teorema 2.6. *Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}_+$, con $d \geq 2$ y tales que, $a + b \geq d > p_d(a) + p_d(b) \neq 0$.*

1. *Si $p_d(a) \geq p_d(b)$, entonces $\beta(d, a, b) = n$ se alcanza para $f^n = (f_1^d)^n$. Además,*

$$\beta(d, a, b) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \ / \ a_{n+2}p_d(a) + a_{n+1}p_d(b) \geq d > a_{n+1}p_d(a) + a_n p_d(b)\}.$$

2. Si $p_d(a) < p_d(b)$, entonces $\beta(d,a,b) = n$ se alcanza para $f^n = (f_1^d)^{n-1} \circ f_2^d$. Además,

$$\beta(d,a,b) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \ / \ a_{n+1}p_d(a) + a_{n+2}p_d(b) \geq d > a_n p_d(a) + a_{n+1}p_d(b)\}.$$

Demostración. Probaremos 1. y de forma análoga se obtiene 2.

Por 2.5, se tiene que $\beta(d,a,b) = n \in \mathbb{Z}_+$.

Por 2.4, al aplicar f_0^d, siempre que $f \in \Lambda(d)$, el par es bueno. Luego, f_0^d no ha de intervenir en la composición de f.

Como,

$$p_d(a+b-d) + p_d(b) = p_d(p_d(a) + p_d(b)) + p_d(b) =$$

$$= p_d(a) + 2p_d(b) < 2p_d(a) + p_d(b) = p_d(p_d(a) + p_d(b)) + p_d(a) = p_d(a+b-d) + p_d(a).$$

Una sencilla inducción acaba la prueba de 1. □

Corolario 2.7. *Con las notaciones de 2.6, supongamos $p_d(a) \geq p_d(b)$ con $p(a) + p(b) \neq 0$. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$a_n < \frac{d}{p_d(a) + p_d(b)} \leq a_{n+1},$$

siendo $\{a_n\}$ la sucesión de Fibonacci. Entonces $(f_1^d)^{n-2}(a,b)$ es bueno y ó bien $(f_1^d)^{n-1}(a,b)$ es malo ó bien $(f_1^d)^{n-1}(a,b)$ es bueno y necesariamente $(f_1^d)^n(a,b)$ es malo. En particular, $n-1 \leq \beta(d,a,b)$.

Demostración. Que $(f_1^d)^{n-2}(a,b)$ es bueno se deduce de que $a_n p(a) + a_{n-1}p(b) \leq a_n p(a) + a_n p(b) < d$.

Por otro lado, si $(f_1^d)^{n-1}(a,b)$ y $(f_1^d)^n(a,b) = (a', b')$ son bueno, entonces

$$p_d(a') + p_d(b') = a_{n+2}p_d(a) + a_{n+1}p_d(b) < d.$$

Luego $d > a_{n+1}p_d(a) + a_{n+1}p_d(b)$, lo que es una contradicción.

□

Nota 2.8. No se puede afirmar nada de $(f_1^d)^{n-1}(a,b)$.

Por ejemplo, tomando $d = 12$, $a = 18$, $b = 12$, es $a_2 < \dfrac{d}{p(a) + p(b)} \leq a_3$. Por tanto $n = 2$, y $f_1^{12}(18,12) = (18,18)$, es malo.

En cambio, para $d = 7$, $a = 9$, $b = 2$, es $a_2 < \dfrac{d}{p(a) + p(b)} \leq a_3$. Por tanto $n = 2$, y $f_1^7(9,2) = (4,9)$ es bueno.

References

[1] S. S. Abhyankar: Desingularization of plane curves. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics A.M.S.* **40**, Part 1, (1983), 1–45.

[2] S. S. Abhyankar: Good Points of a Hypersurface. *Advances in Math.* **68**, (1988), 87–256.

[3] S. S. Abhyankar: *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*. Math. Surveys and Monographs A.M.S..**35**, (1990).

[4] S. S. Abhyankar: *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*. Springer-Verlag. New York Inc., (1998).

[5] V. Cossart - J. Giraud - V. Orbanz: *Resolution of surfaces singularities*. Lec. Not. Math., **1101**. Springer-Verlag. (1984).

[6] A. Granja - C. Rodríguez: On the extension of Abhyankar's Analytic desingularization. Preprint (2001).

[7] H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of zero characteristic. *Annals of Mathematics*, **79**, (1964), 109−326.

[8] M. Nagata: *Local Rings*. Inter. Pub. (1962).

[9] O. Zariski - P. Samuel: *Conmutative algebra*. Vol. I and II. Van Nostrand, Princeton. (1960).

A. Granja : Dpto. Matemáticas. Universidad de León. *e-mail* **demagb@isidoro.unileon.es**

C. Rodríguez : Dpto. Matemáticas. Universidad de León. *e-mail* **demmrs@isidoro.unileon.es**