Haces perversos y t-estructuras *

F. Gudiel L. Narváez

Abstract

Perverse sheaves stratified by a closed set and its complementary open set are described, from the point of view of glueing t-structures [1]. The main result is that the category of perverse sheaves is equivalent to a category that involves only usual sheaves and morphisms of sheaves. The construction of a functorial mapping cone in a certain subcategory of arrows in the derived category is included, playing an important role in the equivalence theorem. This work originate in the conical-constructible case studied in [5] and is part of the Ph. D. done by the first author under the advising of the second one.

Introducción

Sea X un espacio topológico estratificado por un cerrado F y su abierto complementario U. Desde el punto de vista de las t-estructuras [1], podemos definir la categoría de los haces perversos sobre X como el corazón de la t-estructura definida sobre la categoría derivada de los haces sobre X, $\mathcal{D}_X$, por pegamiento de otras t-estructuras definidas sobre $\mathcal{D}_U$ y $\mathcal{D}_F$ (concretamente, la natural sobre $\mathcal{D}_U$ y la natural desplazada d lugares sobre $\mathcal{D}_F$; de aquí diremos que la perversidad de F es d). Abordaremos la descripción del corazón de todas las t-estructuras definidas de esta forma, utilizando un funtor Ψ que nos proporciona una equivalencia de categorías entre la de los haces perversos sobre X y una categoría abeliana *clásica* descriptible en términos de las categorías usuales de haces sobre los estratos de X. En la construcción de dicho funtor juega un papel fundamental la existencia de un $\mathbb{F}$, que nos permitirá relacionar haces perversos relativos a diferente perversidad. En la demostración del resultado, por inducción sobre la perversidad del estrato F, intervienen también otros funtores y categorías auxiliares, así como la construcción del cono de un morfismo en la categoría derivada, que tiene sentido en una subcategoría de la de las flechas de la categoría derivada de los haces sobre X.

1 Preliminares

Sea X un espacio topológico, provisto de un haz de anillos $\mathcal{O}$, por ejemplo el haz constante, $U \subset X$ un abierto, F el cerrado complementario y sean $i : F \longrightarrow X \longleftarrow U : j$ las inclusiones

*Subvencionado por DGESIC PB97-0723

respectivas. Para $* = X, U, F$ sea $Mod(\mathcal{O}_*) = \mathcal{B}_*$ la categoría de haces de $\mathcal{O}$-módulos sobre el espacio $*$. Sean $i_*, i^*, i^!, j_*, j_!, j^*$ los funtores asociados a las inclusiones i, j.

Supongamos que tenemos unas subcategorías $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{B}_*$ adecuadas[1], por ejemplo las de haces constructibles respecto de la estratificación elegida, en caso de que tengamos condiciones de trivialidad y finitud topológicas. Por ejemplo cuando X sea una seudovariedad.

Si $\mathcal{D}_* := D^+_{\mathcal{A}_*}(\mathcal{B}_*)$ es la subcategoría plena de complejos acotados inferiormente de la categoría derivada de $\mathcal{B}_*$ de complejos con cohomología en $\mathcal{A}_*$, se tienen funtores definidos entre las siguientes categorías:

$$\mathcal{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}_X \xrightarrow{j^*} \mathcal{D}_U \xrightarrow{\mathbb{R}j_*, j_!} \mathcal{D}_X \xrightarrow{i^*, \mathbb{R}i^!} \mathcal{D}_F$$

(en adelante, usaremos la misma notación para los funtores asociados a las inclusiones y sus funtores derivados).

Ejemplo 1.1. 1. Si $\mathcal{A}_* = \mathcal{B}_*$, entonces $\mathcal{D}_* = D^+(\mathcal{B}_*)$.

2. $\mathcal{A}_* = \{$ haces constructibles de rango arbitrario en cada estrato $\}$, en los casos de trivialidad topológica, seudovariedades, espacios analíticos ...

3. $\mathcal{A}_* = \{$ haces constructibles de rango finito en cada estrato $\}$.

Estamos, pues, en las condiciones en las que se puede efectuar el pegamiento de t-estructuras definidas sobre $\mathcal{D}_U$ y $\mathcal{D}_F$ para obtener una nueva t-estructura sobre $\mathcal{D}_X$ de la forma:

$$\mathcal{D}_X^{\leq 0} := \{K \in \mathcal{D}_X \ / \ j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0}, i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\}$$
$$\mathcal{D}_X^{\geq 0} := \{K \in \mathcal{D}_X \ / \ j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0}, i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}$$

Sea la estratificación $\Sigma = \{F, U\}$ y $d \geq 0$; definimos la categoría de los haces d-perversos sobre X con respecto a la estratificación Σ, notada $Perv^d(X, \Sigma)$, como el corazón de la t-estructura sobre $\mathcal{D}_X$ obtenida por pegamiento de la natural sobre $\mathcal{D}_U$ y de la natural desplazada d lugares sobre $\mathcal{D}_F$.

Proposición 1.2. *Un objeto $K \in Perv^d(X, \{F, U\})$ si y sólo si K está concentrado en grados $[0, d]$, j^*K está concentrado en grado 0 y $h^n i^! K = 0$ para todo $n < d$.*

Demostración. Utilizando la definición de la t-estructura sobre $\mathcal{D}_X$ y las sucesiones largas de cohomología asociadas a los triángulos

$$j_!j^* \longrightarrow Id \longrightarrow i_*i^* \qquad i_*i^! \longrightarrow Id \longrightarrow j_*j^*$$

□

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Definimos la categoría de flechas en $\mathcal{C}$, $Arr(\mathcal{C})$, cuyos objetos son ternas (A, B, u) con $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ y $u \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y cuyos morfismos son pares (f_1, f_2), $(f_1, f_2) : (A, B, u) \longrightarrow (A', B', u')$, con $f_1 : A \longrightarrow A'$ y $f_2 : B \longrightarrow B'$, con $u'f_1 = f_2u$. Existen funtores "source" y "end" $s, e : Arr(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ definidos por $s(A, B, u) := A$, $s(f_1, f_2) := f_1$ y $e(A, B, u) := B$, $e(f_1, f_2) := f_2$.

[1]estables para núcleos, conúcleos y extensiones, tales que los funtores asociados a i, j estén definidos

2 El funtor Ψ

Para probar la equivalencia de categorías definiremos un funtor Ψ como composición de otros dos:

2.1 Ω

Sea $\Omega : D(Arr(\mathcal{A}_X)) \longrightarrow Arr(\mathcal{D}_X)$ [2, 5], inducido por la correspondencia que asigna a la terna $(U, V, \alpha) \in C(Arr(\mathcal{A}_X))$ el objeto (V, Q, u), donde Q es el cono de $-\alpha$ y u es la proyección.

2.2 $\mathbb{F}$

Elijamos un funtor exacto $\mathbb{F} : \mathcal{B}_U \longrightarrow \mathcal{B}_U$ de tal modo que exista una transformación natural $\alpha : 1 \longrightarrow \mathbb{F}$ inyectiva, $\mathbb{R}\mathbb{F}(\mathcal{A}_U) = \mathbb{F}(\mathcal{A}_U) \subset \mathcal{A}_U$, $(\mathbb{R}^i j_*)\mathbb{F}(A) = 0$, para $i > 0, A \in \mathcal{A}_U$ y $\mathbb{R}(j_*\mathbb{F}j^*) = (\mathbb{R}j_*)(\mathbb{R}\mathbb{F})j^*$ en $\mathcal{D}_X$.

Nota 2.1. El funtor $\mathbb{F}$ será, siempre, composición de funtores FG con F exacto a la izquierda, G exacto y adjunto a izquierda de F, $\mathcal{B}_U \xrightarrow{G} \tilde{\mathcal{B}}_U \xrightarrow{F} \mathcal{B}_U$

Ejemplo 2.2.
1. Si $\mathcal{A}_* = \mathcal{B}_*$, entonces podemos poner $\tilde{\mathcal{B}}_U = Mod(\mathcal{O}_{U^{dis}})$, $\mathbb{F} = \Delta_*\Delta^*$, siendo $\Delta : U^{dis} \longrightarrow U$ el morfismo identidad.
2. Si $\mathcal{A}_*$ es la categoría de haces constructibles de rango arbitrario en cada estrato, X es el cono sobre S, siendo S un espacio $K(\pi, 1)$, $\tilde{\mathcal{B}}_U = Mod(\mathcal{O}_{\tilde{U}})$ y $\mathbb{F} = p_*p^*$ con $p : \tilde{U} \longrightarrow U$ el revestimiento universal de $U = X -$ vértice.
3. Si $\mathcal{A}_*$ es la categoría de haces constructibles de rango finito en cada estrato y el grupo $H = \pi_1(U, x_0)$ es finito, podemos utilizar el anterior funtor p_*p^*. En cambio, si H es infinito, p_*p^* no nos sirve.

Sea el funtor conúcleo $\mathbb{Q}$, que completa la sucesión exacta $0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F} \xrightarrow{q} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$. Definimos el morfismo $\gamma : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{F}$ como el que verifica $\gamma \circ q = \alpha_{\mathbb{F}} - \mathbb{F}\alpha$.

3 Inducción sobre la perversidad

Sea $\psi_{\mathbb{F}} : \mathcal{A}_X \longrightarrow Arr(\mathcal{A}_X)$ definido como $\psi_{\mathbb{F}}(K) := (K, j_*\mathbb{F}j^*K, adj)$. La composición $\Omega \circ \mathbb{R}\psi_{\mathbb{F}} : \mathcal{D}_X \longrightarrow Arr(\mathcal{D}_X)$ nos proporciona un funtor, denotado Ψ.

Teorema 3.1. *Sea $K \in \mathcal{D}_X$ y $\Psi(K) = (E, F, u)$, entonces $K \in Perv^d(X)$ si y sólo si $E \in Perv^0(X) = \mathcal{A}_X$ y $F \in Perv^{d-1}(X)$ [5].*

Demostración. Utilizando el triángulo funtorial $1 \longrightarrow s \circ \Psi \longrightarrow e \circ \Psi$ y la definición y caracterización de $Perv^d(X)$ en la proposición 1.2. $\square$

4 Resoluciones y categorías

Ahora podemos considerar resoluciones de longitud arbitraria, que llamaremos de tipo Godement, $1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F} \xrightarrow{g_0} \mathbb{F}\mathbb{Q} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{Q}^i \xrightarrow{g_i} \mathbb{F}\mathbb{Q}^{i+1} \longrightarrow \ldots$ siendo g_i la composición de $q_i : \mathbb{F}\mathbb{Q}^i \longrightarrow \mathbb{Q}^{i+1}$ y $\alpha_{i+1} : \mathbb{Q}^{i+1} \longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{Q}^{i+1}$.

Sea $\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$ la categoría de objetos $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$, donde $\mathcal{L} \in \mathcal{A}_U, \mathcal{F} \in \mathcal{A}_X$, $u : j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}$ tales que $u \circ j_* g_{d-2} = 0$ y $\sigma : \mathbb{Q}^d\mathcal{L} \simeq j^*\mathcal{F}$. Los morfismos son pares (f_1, f_2) verificando $f_2 \circ u = u' \circ j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1} f_1$ y $j^* f_2 \circ \sigma = \sigma' \circ \mathbb{Q}^d f_1$[2]. Cualquier otra elección del funtor, digamos $\mathbb{F}'$ nos producirá otra categoría $\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}'}$, equivalente también a $\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$.

Nota 4.1. Denotamos $\Phi = e \circ \Psi : Perv^d(X) \longrightarrow Perv^{d-1}(X)$. Aplicando Ψ a $\Phi(K)$, tenemos $u^1 : j_*\mathbb{F}j^*\Phi(K) \longrightarrow \Phi^2(K)$, pero $j^*\Phi(K) \simeq \mathbb{Q}j^*K$, con lo que, iterando el proceso tendremos $u^{d-1} : j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}j^*K \longrightarrow \Phi^d(K)$. Por otra parte $\sigma^1 : \mathbb{Q}j^*\Phi(K) \simeq j^*\Phi^2(K)$, pero $j^*\Phi(K) \simeq \mathbb{Q}j^*K$, luego $\sigma^2 : \mathbb{Q}^2 j^*K \simeq j^*\Phi^2(K)$. Repitiendo este procedimiento llegamos a $\sigma^d : \mathbb{Q}^d j^*K \simeq j^*\Phi^d(K)$.

5 La equivalencia de categorías

Definimos los siguientes funtores;

1.- $D_d : Perv^d(X) \longrightarrow \mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$ tal que asigna a cada $K \in Perv^d(X)$,
$D_d(K) := (j^*K, \Phi^d(K), u^d : j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}j^*K \to \Phi^d(K),\ \sigma^d : \mathbb{Q}^d j^*K \simeq j^*\Phi^d(K))$.

2.- $B_d : \mathcal{B}^d_{\mathbb{F}} \longrightarrow Perv^d(X)$, haciendo corresponder a $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma)$ el complejo
$B_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) := j_*\mathbb{F}\mathcal{L} \stackrel{j_*g_0}{\to} j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}\mathcal{L} \stackrel{j_*g_1}{\to} \cdots \to j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}\mathcal{L} \stackrel{u}{\to} \mathcal{F}$

Teorema 5.1. *Los funtores B_d y D_d son casi-inversos uno del otro y definen, pues, una equivalencia de categorías entre $Perv^d(X)$ y $\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$.*

Probaremos este resultado por inducción sobre la perversidad d. Primero, $Id \simeq D_d \circ B_d$ de manera explícita, y mediante unas categorías y funtores auxiliares reduciremos la cuestión a demostrar que B_{d-1} y D_{d-1} son casi-inversos.

Teorema 5.2. $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) \simeq D_d(B_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma))$ *naturalmente.*

Demostración. La prueba se lleva a cabo calculando $D_d(B_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma))$ y definiendo un casi-isomorfismo explícito en términos de ciertos morfismos inducidos por las adjunciones $1 \to FG, GF \to 1$. $\square$

6 Estrategia de la prueba

6.1 Una construcción en la categoría derivada

Sea $\mathcal{Q}$ la subcategoría plena de $Arr(D(\mathcal{A}))$ de objetos (A, B, u) con A concentrado en grado 0 y B concentrado en grados ≥ 0.

[2]Este es un caso particular de $\mathcal{C}(F, G, T)$ categoría abeliana ([4] p. 405), poniendo $F = i^*j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}$, $G = i^*j_*\mathbb{Q}^d : \mathcal{A}_U \longrightarrow \mathcal{A}_F$, $T = i^*j_*q_d$, $m = i^*u$ y $n = i^*adj$.

Proposición 6.1. *La construcción del cono de un morfismo nos proporciona un funtor* $C : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{D}_X$ *y un casi-isomorfismo canónico* $s \simeq C[-1] \circ \Omega$.

6.2 Categorías y funtores auxiliares

Sea $'\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$ la categoría de objetos $(\mathcal{L}, K, v, \tau)$, con $\mathcal{L} \in \mathcal{A}_U, K \in Perv^{d-1}(X)$, $v : j_*\mathbb{F}\mathcal{L} \longrightarrow K$ y $\tau : \mathbb{Q}\mathcal{L} \simeq j^*K$. Los morfismos son pares (f_1, f_2) con $f_2 \circ v = v' \circ j_*\mathbb{F}f_1$ y $j^*f_2 \circ \tau = \tau' \circ \mathbb{Q}f_1$. Esta categoría es abeliana si $Perv^{d-1}(X)$ lo es.

Definimos los funtores:

- $A_d : Perv^d(X) \longrightarrow {}'\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$, $A_d(K) := (j^*K, \Phi(K), u, \sigma : \mathbb{Q}j^*K \simeq j^*\Phi(K))$.
- $C_d : {}'\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}} \longrightarrow Perv^d(X)$, $C_d(\mathcal{L}, K, v, \tau) := (cono(v))[-1]$.
- $E_d : {}'\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$, definido como $E_d(\mathcal{L}, K, v, \tau) :=$
  $(\mathcal{L}, \Phi^{d-1}(K), u^d : j_*\mathbb{F}\mathbb{Q}^{d-1}\mathcal{L} \longrightarrow \Phi^{d-1}(K), \sigma^d : \mathbb{Q}^d\mathcal{L} \simeq j^*\Phi^{d-1}(K))$.
- $F_d : \mathcal{B}^d_{\mathbb{F}} \longrightarrow {}'\mathcal{B}^d_{\mathbb{F}}$, $F_d(\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma) := (\mathcal{L}, B_{d-1}(\mathbb{Q}\mathcal{L}, \mathcal{F}, u, \sigma), j_*g, \alpha_{\mathbb{Q}})$.

Por inducción sobre la perversidad y ayudados por los funtores previamente definidos, tenemos que B_{d-1}, D_{d-1} son casi-inversos $\Rightarrow E_d, F_d$ casi-inversos $\Rightarrow B_d, D_d$ casi-inversos.

References

[1] A.A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Faisceaux pervers* volume 100 Asterisque. 1983.

[2] P. Deligne and N. Katz. *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7 II)*, vol. 340 of *Lecture Notes in Math.*. Springer-Verlag, 1973.

[3] M. Goresky and R. MacPherson. *Intersection homology theory*, *Topology*, 19: p. 135–162, 1980.

[4] R. MacPherson and K. Vilonen. *Elementary construction of perverse sheaves*, *Invent. Math.*, 84: p. 403–436, 1986.

[5] L. Narváez-Macarro. *Cycles évanescents et faisceaux pervers. II. Cas des courbes planes réductibles.* In J.P. Brasselet, editor, *Singularities (Lille, 1991)*, vol. 201 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, p. 285–323. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

F. Gudiel, Depto. Algebra. Univ. Sevilla P.O. Box 1160, Sevilla, 41080 Spain, e-mail: gudiel@algebra.us.es;

L. Narváez, Depto. Algebra. Univ. Sevilla P.O. Box 1160, Sevilla, 41080 Spain, e-mail:narvaez@algebra.us.es