Pendientes en sistemas hipergeométricos irregulares en codimensión 1

María Isabel Hartillo Hermoso*

Abstract

In this work we describe how many slopes may have a hypergeometric system with codimension one, that is, with a toric ideal generated by one element. In the case we have the row-reduced matrix which defines the system with all the nonzero coefficients positive we determine exactly all the slopes of the system.

Introducción

La teoría de $\mathcal{D}$-módulos generaliza los conceptos en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes holomorfos en una variable compleja x. Consideraremos el álgebra de Weyl,

$$\mathcal{A}_n = \mathbf{C}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$$

es decir, el anillo de operadores diferenciales con coeficientes polinómicos en n variables. Este anillo no es conmutativo, y los símbolos anteriores verifican las relaciones: $[x_i, x_j] = 0$, $[\partial_i, \partial_j] = 0$, y $[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}$. Si tomamos un elemento en $\mathcal{A}_1$:

$$P = a_m(x)\partial^m + a_{m-1}(x)\partial^{m-1} + \cdots + a_0(x), \quad \text{con} \quad a_m(x) \neq 0,$$

define una ecuación diferencial ordinaria.

La condición de Fuchs nos describe que el punto $x = 0$ es un punto singular regular si y sólo si se verifica la igualdad: $m - val(a_m(x)) = \max_{j=0,\ldots,m}\{j - val(a_j(x))\}$, donde $val(a_j(x))$ denota el orden de anulación de $a_j(x)$ en $x = 0$.

Podemos asociarle a P un objeto, el polígono de Newton, definido

$$\mathcal{N}(P) = \text{envolvente convexa}(\bigcup_{j=0}^{m}(j, j - val(a_j(x)) + (-\mathbf{N})^2)$$

así P tendrá en $x = 0$ un punto singular regular si y sólo si $\mathcal{N}(P)$ es un cuadrante.

La generalización del concepto de irregularidad en varias variables es el haz de irregularidad definido respecto de una hipersuperficie. También se obtiene el concepto de pendiente de un $\mathcal{D}$-módulo respecto de una hipersuperficie, que describe saltos de la filtración de Gevrey en dicho haz.

*Parcialmente financiado por FQM-218 y DGESIC.

Dada $A = (a_{ij})$ matriz $d \times n$ de enteros con rango d le asociamos el ideal, $I_A \subset \mathbf{C}[\partial]$, que llamaremos ideal tórico. I_A es el ideal generado por $\{\partial^u - \partial^v | u, v \in \mathbf{N}^n,\ Au^t = Av^t\}$. Dado $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbf{C}^d$ y $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, notando $\theta_i = x_i\partial_i$ consideramos el ideal generado por los elementos de $A\theta^t - \beta$, y así llamamos sistema hipergeométrico de Gelfand-Kapranov-Zelevinski al sistema definido por el ideal: $H_A(\beta) = \langle I_A, A\theta^t - \beta \rangle$. El cociente $\mathcal{H}_A(\beta) = \mathcal{A}_n/H_A(\beta)$ es un $\mathcal{A}_n$-módulo holónomo.

Dadas dos matrices de enteros A, A', tales que existe $G \in GL_d(\mathbf{Q})$ tal que $A' = GA$, entonces $I_A = I_{A'}$ y $H_A(\beta) = H_{A'}(G\beta)$, por lo que dada una matriz de enteros podemos considerar su matriz reducida por filas. Si el ideal tórico es homogéneo para la graduación usual, es decir $(1, \ldots, 1)$ está en la $\mathbf{Q}$-variedad generada por las filas de A, el sistema es regular.

En nuestro caso consideraremos matrices $n \times (n+1)$, de rango n, y tomando el generador P del ideal tórico podremos determinar con respecto a qué hipersuperficies puede haber pendientes, y restringiremos éstas sólo a las proporcionadas por los diferentes polígonos de Newton de P. En el caso en que la reducida por filas de A tenga todos los coeficientes no nulos positivos podremos demostrar que todas éstas son pendientes.

1 Cálculo de pendientes

Existe un algoritmo ([1]) para calcular las pendientes de un $\mathcal{D}$-módulo respecto de una hipersuperficie lisa, por lo que, en lo que sigue consideraremos que esta hipersuperficie respecto de la cual vamos a calcular las pendientes es $x_n = 0$.

El anillo $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n$ admite varias filtraciones. En primer lugar la filtración definida por el orden de los operadores diferenciales, que denotaremos $F_k(\mathcal{D})$, dado $P = \sum_\beta a_\beta(x)\partial^\beta$, consideramos $ord_F(P) = \max\{|\beta|, a_\beta \neq 0\}$, lo que nos da el menor índice de la filtración en que está P. También se define la filtración de Malgrange-Kashiwara respecto de $x_n = 0$, que denotaremos $V_k(\mathcal{D})$; dado $P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta$, sea $ord_V(P) = \max\{\beta_n - \alpha_n | a_{\alpha,\beta} \neq 0\}$. Dados $(p, q) \neq (0, 0)$, un par de enteros no negativos, definimos la forma lineal sobre $\mathbf{Q}^2$ dada por $L(a, b) = pa + qb$. Así dado un operador $P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta$, definimos $ord_L = \max\{L(|\beta|, \beta_n - \alpha_n) | a_{\alpha,\beta} \neq 0\}$, lo que nos da una nueva filtración que notaremos $L_k(\mathcal{D})$. La L-filtración describe en particular a las filtraciones F y V, de hecho nos permite ordenar dichas filtraciones, así dadas L y L' definidas por parejas (p, q) y (p', q') respectivamente, diremos que $L < L'$ si y sólo si $-p/q < -p'/q'$. Dada L definimos su pendiente como el racional $-p/q$.

En general dada una filtración L definimos el L-símbolo de un operador como $\sigma_L(P) = \sum_{L(|\beta|, \beta_n - \alpha_n) = ord_L(P)} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \xi^\beta$ elemento en el anillo graduado de $\mathcal{D}$ respecto de la filtración L, que salvo para la V filtración es un anillo conmutativo.

Si I es un ideal de $\mathcal{D}$, la filtración L inducida sobre I, tiene un ideal graduado asociado $gr^L(I)$, es decir, el ideal generado por los L-símbolos principales de los operadores de I.

Definición 1.1. [5] Sea I un ideal de $\mathcal{D}$. Las pendientes del $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}/I$, son las pendientes de las formas lineales L tales que $\sqrt{gr^L(I)}$ no es bihomogéneo para las filtraciones F y V.

Nota 1.2. Si estamos calculando las pendientes de un $\mathcal{D}$-módulo holónomo $\mathcal{D}/I$, y encontramos una L tal que $x_1\xi_1, \ldots, x_n\xi_n \in \sqrt{gr^L(I)}$, entonces L no es pendiente de dicho módulo, ya que todas sus componentes son bihomogéneas para F y V.

2 Pendientes en codimensión 1

Sea A una matriz $n \times (n+1)$ de coeficientes enteros, con rango n y $\beta \in \mathbf{C}^n$. Exigimos algo más: todos los menores $n \times n$ de A son distintos de cero (al final de la sección veremos que no es algo tan restrictivo). Gracias a esta condición podemos asegurar que el vector u generador del núcleo de A tiene todas las componentes no nulas. Llamamos $P \in \mathbf{C}[\partial]$ al elemento generador del ideal tórico definido por u.

Nuestro interés se centra en el cálculo de las pendientes del $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{H}_A(\beta)$, que suponemos no regular, por lo que P no es homogéneo respecto de la graduación en grado total. $P = \partial^{u^+} - \partial^{u^-}$, donde u^+ representa las coordenadas positivas de u, y u^-, las negativas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|u^+| > |u^-|$ y renombramos las variables siendo las k primeras aquellas componentes no nulas de u^+.

Lema 2.1. *Sea A matriz $n \times (n+1)$ de enteros con todos los menores $n \times n$ distintos de cero, ordenadas las variables como antes, $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene ninguna pendiente respecto de las k primeras variables.*

Demostración. Probaremos que $\mathcal{H}_A(\beta)$ no tiene ninguna pendiente respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$.

Gracias a la condición sobre los menores, podemos, mediante una reducción por filas obtener los elementos de $H_A(\beta)$: $Q_1 = a_1\theta_2 + b_1\theta_1 - \beta'_1, \ldots, Q_n = a_n\theta_{n+1} + b_n\theta_1 - \beta'_n$, de forma que $a_i, b_i \neq 0$ para todo i. Usando la nota 1.2 para ver que una cierta L no es pendiente para $\mathcal{H}_A(\beta)$, nos basta ver que $x_1\xi_1 \in \sqrt{gr^L(H_A(\beta))}$. Y para esto nos basta con encontrar un $H \in H_A(\beta)$ con $\sigma_L(H) = x_1^{k_1}\xi_1^{k_2}$.

Sea L una pendiente cualquiera respecto de la hipersuperficie $x_1 = 0$, tenemos la siguiente sucesión de elementos S_i en $H_A(\beta)$, donde $ord_L(R_i) < ord_L(P) = ord_L(S_i)$:

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & \partial_1^{u_1}\partial_2^{u_2-1}\partial_3^{u_3}\cdots\partial_k^{u_k}Q_1 - a_1x_2P \\
& = & b_1\theta_1\partial_1^{u_1}\partial_2^{u_2-1}\partial_3^{u_3}\cdots\partial_k^{u_k} + R_1. \\
S_2 & = & b_1\theta_1\partial_1^{u_1}\partial_2^{u_2-2}\partial_3^{u_3}\cdots\partial_k^{u_k}Q_1 - a_1x_2S_1 \\
& = & b_1^2\theta_1^2\partial_1^{u_1}\partial_2^{u_2-2}\partial_3^{u_3}\cdots\partial_k^{u_k} + R_2. \\
& \vdots & \\
S_{u_2} & = & b_1^{u_2-1}\theta_1^{u_2-1}\partial_1^{u_1}\partial_3^{u_3}\cdots\partial_k^{u_k}Q_1 - a_1x_2S_{u_2-1} \\
& = & b_1^{u_2}\theta_1^{u_2}\partial_1^{u_1}\partial_3^{u_3}\cdots\partial_k^{u_k} + R_{u_2}. \\
S_{u_2+1} & = & b_1^{u_2}\theta_1^{u_2}\partial_1^{u_1}\partial_3^{u_3-1}\cdots\partial_k^{u_k}Q_2 - a_2x_3S_{u_2} \\
& = & b_1^{u_2}b_2\theta_1^{u_2+1}\partial_1^{u_1}\partial_3^{u_3-1}\cdots\partial_k^{u_k} + R_{u_2+1}. \\
& \vdots & \\
S_{u_2+u_3} & = & b_1^{u_2}b_2^{u_3-1}\theta_1^{u_2+u_3-1}\partial_1^{u_1}\partial_4^{u_4}\cdots\partial_k^{u_k}Q_1 - a_2x_3S_{u_2+u_3-1} \\
& = & b_1^{u_2}b_2^{u_3}\theta_1^{u_2+u_3}\partial_1^{u_1}\partial_4^{u_4}\cdots\partial_k^{u_k} + R_{u_2+u_3}. \\
& \vdots &
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
S_{u_2+\cdots+u_k} &= b_1^{u_2}\cdots b_{k-1}^{u_k-1}\theta_1^{u_2+\cdots+u_k-1}\partial_1^{u_1}Q_1 - a_{k-1}x_kS_{u_2+\cdots+u_k-1} \\
&= b_1^{u_2}\cdots b_{k-1}^{u_k}\theta_1^{u_2+\cdots+u_k}\partial_1^{u_1} + R_{u_2+\cdots+u_k}.
\end{aligned}
$$

□

Algunas de las ideas utilizadas en el siguiente teorema están inspiradas en el trabajo de Castro-Jiménez y Takayama [4].

Teorema 2.2. *Sea A matriz $n\times(n+1)$ de enteros con todos los menores $n\times n$ distintos de cero, ordenadas las variables como antes, si $\mathcal{H}_A(\beta)$ tiene alguna pendiente respecto de $x_j=0$ con $j>k$ es $L_j=u_jF+(|u^+|-|u^-|)V$.*

Ordenando las variables como antes, si su reducida por filas tiene todas sus elementos no nulos positivos, entonces $L_j=u_jF+(|u^+|-|u^-|)V$ es pendiente respecto de $x_j=0$.

Demostración. Sea $L'<L_j$ cualquiera, entonces $\sigma_{L'}(P)=\xi_1^{u_1}\cdots\xi_k^{u_k}$, siguiendo la demostración del lema 2.1 seguimos teniendo $ord_{L'}(R_i)<ord_{L'}(P)=ord_{L'}(S_i)$ y

$$
\sigma_{L'}(S_{u_2+\cdots+u_k}) = cx_1^{u_2+\cdots+u_k}\xi_1^{u_1+\cdots+u_k}.
$$

Así de la misma forma que antes L' no es pendiente respecto de $x_j=0$.

Consideremos ahora $L''>L_j$ cualquiera, entonces $\sigma_{L''}(P)=-\xi_{k+1}^{u_k+1}\cdots\xi_{n+1}^{u_{n+1}}$, igual que antes podemos tomar elementos en $H_A(\beta)$: $Q_1'=c_1\theta_1+d_1\theta_j-\beta_1'',\ldots,Q_n'=c_n\theta_{n+1}+d_n\theta_j-\beta_n''$, obtenemos la siguiente sucesión de elementos S_i' en $H_A(\beta)$ tales que $ord_{L''}(R_i')<ord_{L''}(P)=ord_{L''}(S_i')$

$$
\begin{aligned}
S_1' &= \partial_{k+1}^{u_{k+1}-1}\partial_{k+2}^{u_{k+2}}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}}Q_{k+1}' + c_{k+1}x_{k+1}P \\
&= d_{k+1}\theta_j\partial_{k+1}^{u_{k+1}-1}\partial_{k+2}^{u_{k+2}}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}} + R_1'. \\
S_2' &= d_{k+1}\theta_j\partial_{k+1}^{u_{k+1}-2}\partial_{k+2}^{u_{k+2}}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}}Q_{k+1}' - c_{k+1}x_{k+1}S_1' \\
&= d_{k+1}^2\theta_j^2\partial_{k+1}^{u_{k+1}-2}\partial_{k+2}^{u_{k+2}}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}} + R_2'. \\
&\vdots \\
S_{u_{k+1}}' &= d_{k+1}^{u_{k+1}-1}\theta_j^{u_{k+1}-1}\partial_{k+2}^{u_{k+2}}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}}Q_{k+1}' - c_{k+1}x_{k+1}S_{u_{k+1}-1} \\
&= d_{k+1}^{u_{k+1}}\theta_j^{u_{k+1}}\partial_{k+2}^{u_{k+2}}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}} + R_{u_{k+1}}'. \\
&\vdots \\
S_{|u^-|-u_j} &= d_{k+1}^{u_{k+1}}\cdots d_{j-1}^{u_{j-1}}d_j^{u_{j+1}}\cdots d_n^{u_{n+1}-1}\theta_j^{|u^-|-u_j-1}\partial_j^{u_j}Q_n' - c_nx_{n+1}S_{|u^-|-u_j-1} \\
&= d_{k+1}^{u_{k+1}}\cdots d_{j-1}^{u_{j-1}}d_j^{u_{j+1}}\cdots d_n^{u_{n+1}}\theta_j^{|u^-|-u_j}\partial_j^{u_j} + R_{|u^-|-u_j}'.
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que tenemos la condición de que la reducida por filas de A tiene todos sus elementos no nulos positivos. Gracias esta condición tenemos que, o bien $P=\partial_1^{u_1}\cdots\partial_n^{u_n}-\partial_{n+1}^{u_{n+1}}$, con $u_1+\ldots+u_n>u_{n+1}$, o bien $P=\partial_1^{u_1}-\partial_2^{u_2}\cdots\partial_{n+1}^{u_{n+1}}$, con $u_1>u_2+\cdots+u_{n+1}$. En el primer caso sólo tendríamos una pendiente respecto de $x_{n+1}=0$, y en el segundo serían n pendientes respecto de las n últimas variables. Demostraremos el primer caso ya que el segundo se hace de forma análoga.

Supongamos que L_{n+1} no es pendiente de $\mathcal{H}_A(\beta)$, por lo tanto $Ch^L(\mathcal{H}_A(\beta))$ se mantendría constante para toda L. Sea $L' > L_{n+1}$, calculemos en este caso el $gr^{L'}(H_A(\beta))$. Siempre podemos tomar $Q''_1 = a'_1\theta_1 + b'_1\theta_{n+1} - \beta''_1, \dots Q''_n = a'_n\theta_n + b'_n\theta_{n+1} - \beta''_n$ y además $H_A(\beta) = \langle P, Q''_1, \dots, Q''_n\rangle$. Tomando un L'-orden $\prec$ tal que $\partial_{n+1} \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n$, es fácil ver que todos los S-polinomios son cero y por tanto nuestro conjunto de partida es una L'-base. Con los cálculos que llevamos a cabo en el lema 2.1 obtuvimos que para $L'' < L_{n+1}$ $\xi_1 \dots \xi_n, x_i\xi_i \in \sqrt{gr^{L''}(H_A(\beta))}$:

$$Ch^{L'}(\mathcal{H}_A(\beta)) = T^*_{\mathbf{C}^{n+1}}\mathbf{C}^{n+1} \cup T^*_{y_1=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup \cdots \cup T^*_{y_n=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup$$

$$\cup T^*_{y_1=y_2=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup \cdots \cup T^*_{y_{n-1}=y_n=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup \cdots \cup T^*_{y_1=y_2=\cdots=y_n=0}\mathbf{C}^{n+1}$$

$$\not\subset T^*_{\mathbf{C}^{n+1}}\mathbf{C}^{n+1} \cup T^*_{y_1=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup \cdots \cup T^*_{y_n=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup T^*_{y_{n+1}=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup$$

$$\cup T^*_{y_1=y_2=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup \cdots \cup T^*_{y_n=y_{n+1}=0}\mathbf{C}^{n+1} \cup \cdots \cup T^*_{y_1=y_2=\cdots=y_{n-1}=y_{n+1}=0}\mathbf{C}^{n+1}$$

ya que no tenemos la componente $T^*_{y_1=y_2=\cdots=y_n=0}\mathbf{C}^{n+1}$. □

Nota 2.3. En el caso en que la matriz A tenga un menor $n \times n$ igual a cero, esto equivale a que exista un subíndice i tal que $P \in \mathbf{C}[\partial_1, \dots, \partial_{i-1}, \partial_{i+1}, \dots, \partial_{n+1}]$, y también podemos obtener $Q_1 = cx_j\partial_j - \beta'_j$ y $Q_2, \dots, Q_n \in \mathcal{A}_n$, donde hemos quitado la variable j-ésima. $H_A(\beta)\langle P, Q_1, \dots Q_n\rangle$, si notamos $A_{i,j}$ a la matriz obtenida quitándole a A la fila j-ésima y la columna i-ésima con los métodos anteriores se obtienen que $H_A(\beta)$ no tiene pendientes respecto de $x_i = 0$ y para el resto de las hipersuperficies tiene las mismas pendientes que $H_{A_{i,j}}(\beta)$ (Haciendo los cambios de nombre de variables pertinentes).

References

[1] A. Assi, F. J. Castro-Jiménez y J.M. Granger. *How to calculate the slopes of a D-module.* Compositio Math., vol 104 (1996) 107-123.

[2] J. E. Björk. *Rings of differential operators.* North-Holland, 1979.

[3] F. J. Castro-Jiménez. *Théorème de division pour les opérateurs differentiels et calcul des multiplicités.* Volumen de Thèse de 3^{eme} cycle, Paris, 1984.

[4] F.J. Castro-Jiménez y N. Takayama. *Slopes of a hypergeometric System Associated to a Monomial Curve.* math.AG/010746, 2001.

[5] Y. Laurent. *Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels.* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^{eme} série, vol. 20 (1987) 391-441.

[6] Z. Mebkhout. *Le théorème de positivité de l'irregularité pour le $\mathcal{D}$-modules.* Grothendieck Festschrift III, Progress in Math., vol 88 (1990) 84-131.

[7] M. Saito, B. Sturmfels y N. Takayama. *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations.* Algorithms and Computations in Mathematics, **6** Springer, 2000.

María Isabel Hartillo Hermoso, isabel.hartillo@uca.es; Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Aptdo. 40, 11510 Puerto Real (Cádiz)