Valoraciones de cuerpos de series*

Francisco Javier Herrera Govantes Miguel Ángel Olalla Acosta
José Luis Vicente Córdoba

Abstract

En este texto se exponen las valoraciones monomiales sobre cuerpos de series en n variables mediante la descripción explícita de su cuerpo residual. Asimismo se muestran casos relevantes de valoraciones no monomiales. Concretamente se clasifican todas las valoraciones discretas de rango 1 sobre cuerpos de series en dos y tres variables. En el caso de tres variables aparece el concepto de ideal implícito de una valoración.

1 Valoraciones monomiales

Nota 1.1. Sea k un cuerpo, $R = k[\![\mathbf{X}]\!] = \mathbf{k}[\![\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_n}]\!]$ el anillo de series correspondiente donde las X_i son variables, K su cuerpo de fracciones.

1. Toda serie $f \in R$ se escribirá en la forma $f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^n} f_A \mathbf{X}^A$, donde, si $A = (a_1, \dots, a_n)$, entonces $\mathbf{X}^A$ significa $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$. Pondremos
$$\mathcal{E}(f) = \{A \in \mathbb{Z}_0^n \mid f_A \neq 0\}.$$

2. Hablaremos de valoraciones de R en el sentido de restricción a R de una valoración de su cuerpo de fracciones. Para abreviar, la palabra valoración significará "valoración discreta" de R centrada en el ideal maximal $M = (\mathbf{X}) \cdot R$.

3. En $\mathbb{Z}^m$ se considerará el orden lexicográfico, que será denotado por $\leq_{\text{lex}}$. Éste es un orden total para la estructura de grupo.

4. Sea $0 < m \leq n$ un entero y sea
$$L = \{B_1, \dots, B_n\} \subset \mathbb{Z}_0^m \setminus \{0\}$$
tal que L sea un sistema de generadores de $\mathbb{Z}^m$. Cada monomio $\mathbf{X}^A$ de R tiene asociado un elemento de $\mathbb{Z}_0^m$, que se llama su L-*grado*, que es
$$\text{grado}_L(\mathbf{X}^A) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i, \quad A = (a_1, \dots, a_n).$$

*Subvencionado por FQM-218.

Lema 1.2. *Sea $B \in \mathbb{Z}_0^m$; el conjunto de monomios cuyo L-grado es igual a B es finito. Con esto, las componentes homogéneas del L-graduado de R son k-espacios vectoriales de dimensión finita.*

Demostración. Sea Δ el conjunto del enunciado. Si B no es el grado de ningún monomio, entonces $\Delta = \emptyset$; supongamos, pues $\Delta \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathbb{Z}_0^n$ tal que $B = \sum_{i=1}^n a_i B_i$. Como $B_i \neq \mathbf{0}$, $\forall i = 1, \ldots, n$, si $B = (b_1, \ldots, b_m)$, cualquier combinación lineal $B = \sum_{i=1}^n x_i B_i$ con $x_i \in \mathbb{Z}_0$ debe tener los coeficientes x_i limitados por el máximo de los b_j. Esto prueba el lema. □

Definición 1.3. Sea $0 < m \leq n$ un entero y sea

$$L = \{B_1, \ldots, B_n\} \subset \mathbb{Z}_0^m \setminus \{0\}$$

tal que L sea un sistema de generadores de $\mathbb{Z}^m$. Sea $v : R \to \mathbb{Z}^m \cup \{\infty\}$ la función que a cero asigna ∞ y a $f \neq 0$ asigna

$$v(f) = \min_{\text{lex}}\{\text{grado}_L(\mathbf{X}^A) \mid A \in \mathcal{E}(f)\} .$$

La extensión de v a K/k, cuyo grupo de valores es $\mathbb{Z}^m$ es una valoración discreta de rango m que llamaremos valoración monomial asociada a L.

Nota 1.4. 1. Sean $A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{Z}^n$; las condiciones siguientes son equivalentes:

   (a) Los monomios $\{\mathbf{X}^{A_1}, \ldots, \mathbf{X}^{A_p}\}$ son algebraicamente independientes sobre k (pueden ser fraccionarios).

   (b) $\{A_1, \ldots, A_p\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{Z}^n$.

2. Sea $0 < m \leq n$ un entero y sea

$$L = \{B_1, \ldots, B_n\} \subset \mathbb{Z}_0^m \setminus \{0\}$$

   tal que L sea un sistema de generadores de $\mathbb{Z}^m$.

3. Consideremos el sistema diofántico de ecuaciones lineales en las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ siguiente: $\sum_{i=1}^n x_i B_i = 0$; la matriz M de sus coeficientes tiene como columnas a los vectores B_i y es, por tanto, de rango m. Si no tiene ninguna solución en $\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, los únicos monomios de grado cero de K son las constantes. Si la tiene entonces, automáticamente, $m < n$ y las soluciones forman un subgrupo de rango $n - m$ de $\mathbb{Z}^n$. Un sistema diofántico de este tipo se llamará un *sistema diofántico positivo*.

Proposición 1.5. *Sea v una valoración discreta de K/k de rango m (supondremos que tiene grupo de valores $\mathbb{Z}^m$). Sean $B_i = v(X_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ y consideremos el conjunto $L = \{B_1, \ldots, B_n\}$ de generadores de $\mathbb{Z}^m$. Sea v_L la valoración monomial de K/k asociada a L. Entonces, para toda serie $f \in R$ se verifica que $v(f) \geq_{\text{lex}} v_L(f)$.*

Demostración. Lo probaremos primero para los monomios y las formas respecto del L-grado.

1) Para cualquier monomio X^A es evidente que $v(\mathbf{X}^A) = v_L(\mathbf{X}^A)$.

2) Sea f_B una L-forma de L-grado B. Sabemos que f_B es una suma finita de monomios de L-grado B, pongamos

$$f_B = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathbf{X}^{A_i},$$

donde $v(\mathbf{X}^{A_i}) = v_L(\mathbf{X}^{A_i}) = B$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$v(f_B) \geq \min_{\text{lex}}\{v(\mathbf{X}^{A_i}\} = \min_{\text{lex}}\{v_L(\mathbf{X}^{A_i})\} = v_L(f_B).$$

3) Sea $f \in R$. Pongamos $f = f_B + g$ donde f_B es la L-forma inicial de f, es decir, $v_L(g) >_{\text{lex}} v_L(f_B) = B = v_L(f)$. Entonces

$$v(f) \geq \min_{\text{lex}}\{v(f_B), v(g)\} \geq \min_{\text{lex}}\{v_L(f_B), v(g)\}.$$

Veamos que $v(g) \geq_{\text{lex}} v_L(f_B) = B$: Sea $\mathbf{X}^A$ un monomio que tenga coeficiente no nulo en f_B y consideremos el cociente $g/\mathbf{X}^A$. Es claro que $g/\mathbf{X}^A \in R[Y_1, \ldots, Y_s]$, donde cada Y_i es un cociente de monmios en las variables $X_1 \ldots, X_n$ de valor nulo. También es claro que $R[Y_1, \ldots, Y_s] \subset R_v$, luego $v(g/\mathbf{X}^A) \geq_{\text{lex}} 0$, es decir, $v(g) \geq_{\text{lex}} v(\mathbf{X}^A) = B$ como queríamos.

Entonces

$$v(f) \geq_{\text{lex}} \min_{\text{lex}}\{v_L(f_B), v(g)\} = v_L(f_B) = v_L(f).$$

□

Teorema 1.6. *Sea v una valoración discreta de $K|k$ de rango m, sean $B_i = v(X_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ y consideremos el conjunto $L = \{B_1, \ldots, B_n\}$ de generadores de $\mathbb{Z}^m$. Son equivalentes:*

1. *v es la valoración monomial asociada a L.*
2. *Δ_v está generado sobre k por los $n - m$ monomios (fraccionarios en general) cuyos exponentes son una base de las soluciones del sistema $\sum_{i=1}^{n} y_i B_i = \mathbf{0}$.*

Demostración.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sea K_L el subcuerpo de K formado por todos los cocientes de L-formas del mismo L-grado. Consideremos la inclusión natural de K_L en Δ_v dada por

$$\frac{f_B}{g_B} \to \frac{f_B}{g_B} + \mathfrak{m}_v$$

Sea $f/g \in K$ un elemento tla que $v(f/g) = 0$, es decir, f y g son dos series tales que $v(f) = v(g) = B$. Escribamos $f = f_B + f_1$ y $g = g_B + g_1$, donde f_B y g_B son sus respectivas L-formas iniciales. Entonces

$$\frac{f}{g} - \frac{f_B}{g_B} = \frac{g_B f_1 - f_B g_1}{g_B g},$$

luego $v(f/g - f_B/g_B) > 0$ y
$$\frac{f}{g} + \mathfrak{m}_v = \frac{f_B}{g_B} + \mathfrak{m}_v.$$
Así $K_L \cong \Delta_v$.

Sea ahora M el submódulo de $\mathbb{Z}^m$ constituido por las soluciones del sistema lineal homogéneo: $L = 0$. Sea $\{A_1, \ldots, A_{n-m}\}$ una base de M. Se tiene entonces:
$$K_L = k(\mathbf{X}^{A_1}, \ldots, \mathbf{X}^{A_{n-m}}) \cong \Delta_v.$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Supongamos que el cuerpo residual es $\Delta_v = k(\mathbf{X}^{A_1}, \ldots, \mathbf{X}^{A_{n-1}})$, donde los $A_1, \ldots, A_{n-m}$ son una base del submódulo M de las soluciones del sitema $L : x_1B_1 + \cdots + x_nB_n = 0$.

Sea v_L la valoración monomial asociada a L. Para probar que $v = v_L$ es suficiente demostrar que, para toda L-forma f, se tiene $v(f) = v_L(f)$.

Supongamos que existe una L-forma f tal que $v(f) >_{\text{lex}} v_L(f)$. Sabemos que f es una suma finita de monomios de L-grado $v_L(f)$, pongamos
$$f = \sum_{i=1}^{s} a_i \mathbf{X}^{C_i}.$$

Para cualquier $j = 1, \ldots, n$ tenemos $v(f/\mathbf{X}^{C_j}) > 0$, luego
$$\frac{f}{\mathbf{X}^{C_j}} + \mathfrak{m}_v = 0 + \mathfrak{m}_v.$$
Como
$$\frac{f}{\mathbf{X}^{C_j}} = a_j + \sum_{i \neq j} a_i \mathbf{X}^{C_i - C_j}$$
tenemos $\sum_{i \neq j} a_i \mathbf{X}^{C_i - C_j} + \mathfrak{m}_v = -a_j + \mathfrak{m}_v$. Luego el elemento $\sum_{i \neq j} a_i \mathbf{X}^{C_i - C_j} + \mathfrak{m}_v$ es algebraico sobre k, lo cual es contradicción con que los exponentes de los monomios $\mathbf{X}^{C_j - C_i}$ sean soluciones no triviales del sistema $L = 0$. $\square$

2 Otras valoraciones

En adelante v indicará una valoración de $K = k((X_1, \ldots, X_n)) \to \mathbb{Z}^m \cup \infty$, centrada en el ideal maximal de $R = k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ y los valores de las variables generan $\mathbb{Z}^m$.

2.1 $K = k[\![X_1]\!]$

Si $n = 1$, la única valoración no trivial de rango $m = 1$ es la función de orden usual, pues las formas de $k[\![X]\!]$ son monomios.

2.2 $K = k[\![X_1, X_2]\!]$

Si $n = 2$ caben valoraciones de rango 1 y 2:

a) Si $m = 2$, tras el teorema de Abhyankar sabemos que la valoración ha de ser de dimensión cero. Como $\mathbb{Z}^2$ está generado por $v(X_1)$ y $v(X_2)$ cada forma respecto de $L = \{v(X_1), v(X_2)\}$ es un monomio, luego toda valoración de rango 2 es de dimensión cero y monomial.

b) Si $m = 1$, en [2, 1] están descritas todas las valoraciones posibles, apareciendo en este caso las primeras no monomiales. En particular se demuestra que toda valoración discreta de rango 1 sobre un cuerpo de series de dos variables es de dimensión 1. Además si v es una valoración de éstas de K en $\mathbb{Z}$ y v no es monomial se construyen, mediante un algoritmo, elementos $X_1', X_2' \in R_v$, formalmente independientes sobre k, tales que X_1, X_2 pertenecen a $k[X_1', X_2']$ y el cuerpo residual de v es $\Delta_v = k(X_2'/X_1' + \mathfrak{m}_v)$. De hecho, v se extiende a una valoración monomial sobre el cuerpo $k((X_1', X_2'))$.

2.3 $K = k[\![X_1, X_2, X_3]\!]$

Dada una valoración v discreta de rango 1 sobre K, aplicaremos una serie de transformaciones inyectivas (monoidales y cambios de coordenadas) para obtener su cuerpo residual.

Mediante un algoritmo finito encontramos $Y_1, Y_2, Y_3 \in R_v$ tales que

a) El valor de estos elementos es 1.

b) El residuo de Y_2/Y_1 es trascendente sobre k.

Describiremos ahora las transformaciones que habremos de hacer con la variable Y_3, siempre con base en Y_1, para obtener el cuerpo residual de v. Sea $\sigma : \Delta_v \to R_v$ una sección del homomorfismo natural $R_v \to \Delta_v$. Pongamos $u_2 = \sigma(Y_2/Y_1 + \mathfrak{m}_v)$ y notemos por Δ_2 al cuerpo $k(u_2)$, que es una extensión transcendente pura de k de grado 1.

Supongamos entonces que el residuo de Y_3/Y_1 es algebraico sobre Δ_2, sea $u_{3,1}$ su imagen por σ. Entonces $v(Y_3 - u_{3,1}Y_1) = r_1 > 1$. Entonces existe un residuo $u_{3,r_1} \in \mathrm{im}(\sigma)$, tal que $v(Y_3 - u_{3,1}Y_1 - u_{3,r}Y_1^r) = r_2 > r_1$. Supongamos que $u_{3,r}$ es algebraico sobre Δ_2. Entonces podemos encontrarnos en una de las siguientes situaciones:

Situación 1.- En un número finito de pasos obtenemos un residuo trascendente sobre Δ_2, denotemos este residuo por u_3. Esto quiere decir que tenemos un elemento

$$Z_3 = Y_3 - \sum_{i=1}^{s_3} u_{3,i}Y_1^i,$$

donde cada $u_{3,i}$ es algebraico sobre Δ_2 y $u_3 = \sigma(Z_3/Y_1^{v(Z_3)} + \mathfrak{m}_v)$ es trascendente sobre Δ_2. En este caso notaremos por Δ_3 al cuerpo $k(u_2, \{u_{3,i}\}_{i=1}^{s_3}, u_3)$, que es una extensión trascendente de grado 2 del cuerpo k. Además, como los elementos Y_1, Y_2, Y_3 están en R_v entonces $\Delta_3 \subseteq \Delta_v$.

Situación 2.- Todos los residuos obtenidos son elementos algebraicos sobre Δ_2. En este caso llamamos Δ_3 a la extensión algebraica $\Delta_2(\{u_{3,i}\}_{i\geq 1})$. También en este caso $\Delta_3 \subseteq \Delta_v$

Finalizamos la sección con el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *En cualquier situación el cuerpo residual de v es Δ_3.*

Demostración. Hemos realizado un número finito de transformaciones para llevar K al cuerpo $L((Y_1,Y_2,Y_3))$, de manera que hemos construido el siguiente homomorfismo φ', según estemos en la situación 1 ó 2:

$$\begin{array}{rcl} \varphi' : L((Y_1,Y_2,Y_3)) & \to & \Delta_3((t)) \\ Y_1 & \mapsto & t \\ Y_2 & \mapsto & u_2 t \\ Y_3 & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} u_3 t \text{ si estamos en la situación 1} \\ \sum_{i\geq 1} u_{3,i} t^i, \;\; u_{3,1} \neq 0 \text{ en la situación 2.} \end{array} \right. \end{array}$$

Como $K \subset L((Y_1,Y_2,Y_3))$, llamemos φ a la restricción de φ' al cuerpo K. Por la construcción de los elementos Y_1,Y_2,Y_3, es evidente que nuestra valoración v se puede escribir $v = \nu_t \circ \varphi$, donde ν_t es la función de orden en t sobre $\Delta_3((t))$. Por tanto, el cuerpo residual de v, Δ_v, está contenido en Δ_3. Por otro lado sabemos que $\Delta_3 \subseteq \Delta_v$, luego tenemos la igualdad. □

Nota 2.2. Observemos que si el homomorfismo φ' es inyectivo entonces tenemos una valoración $v' = \nu_t \circ \varphi'$ sobre $L((Y_1,Y_2,Y_3))$ que extiende a v. En la situación 1 es evidente que y φ' es inyectiva siempre y que esta valoración v' es monomial. En la situación 2, si φ' es inyectiva podemos decir algo más acerca de la extensión algebraica $\Delta_2 \subset \Delta_3$. Si este homomorfismo no es inyectivo su núcleo, $\ker(\varphi')$, es el ideal implícito que aparece en algunos trabajos de M. Spivakovsky. Veremos que en este caso también se puede extender v a una valoración monomial sobre $L((Y_1,Y_2,Y_3))$, pero de rango 2.

Enunciaremos lo que acabamos de decir en los siguientes teoremas:

Teorema 2.3. *En la situación 2, φ' es inyectiva si y sólo si la extensión algebraica $\Delta_2 \subset \Delta_v$ es infinita.*

Demostración. Es evidente que los Y_1,Y_2,Y_3 son formalmente independientes si y sólo si el homomorfismo φ' definido en la introducción es inyectivo. Para la implicación directa se razona por reducción al absurdo, usando teoría de Galois. La implicación inversa es más sencilla. □

Teorema 2.4. *Sea v una valoración discreta de rango 1 sobre $K|k$ centrada en el ideal maximal, entonces la dimensión de v es 1 o 2 y además, si suponemos que hemos aplicado el procedimiento anterior para obtener el cuerpo residual de v y, por tanto, el cuerpo $L((Y_1,Y_2,Y_3))$, entonces:*

1. *Si v tiene dimensión 2 entonces v se extiende a una valoración monomial v' discreta de rango 1 sobre $L((Y_1,Y_2,Y_3))$.*

2. *Si la dimensión de v es 1 entonces tenemos una de las siguientes situaciones:*

   (a) La extensión $k(Y_2/Y_1 + \mathfrak{m}_v) \subset \Delta_v$ es algebraica infinita y podemos extender v a una valoración v' sobre $L((Y_1,Y_2,Y_3))$ de manera que $v'_{|L((Y_1,Y_2))}$ es monomial.

   (b) La extensión $k(Y_2/Y_1 + \mathfrak{m}_v) \subset \Delta_v$ es algebraica finita y existe una valoración monomial discreta de rango 2 sobre $L((Y_1,Y_2,Y_3))$ que “extiende” a v.

Demostración. Los casos 1 y 2-a son consecuencia directa de las construcciones anteriores. Supongamos entonces que estamos en el caso 2-b:

Consideremos el elemento $W = Y_3 - \sum_{i\geq 1} u_{3,i} Y_1^i$, como $L((Y_1, Y_2, Y_3)) = L((Y_1, Y_2, W))$, podemos construir la valoración monomial v' de rango 2 como sigue: $v'(Y_1) = v'(Y_2) = (0, 1)$ y $v'(W) = (1, 0)$. Es evidente que v' es una valoración monomial de rango 2 sobre $L((Y_1, Y_2, Y_3))$ que "extiende" a v, pues

$$\forall f \in K,\ v'(f) = (0, v(f)).$$

$\square$

References

[1] E. Briales, *Constructive theory of valuations.*, Comm. Algebra **17** (1989), no. 5, 1161–1177.

[2] E. Briales and F.J. Herrera, *Construcción explícita de las valoraciones de un anillo de series formales en dos variables.*, Actas X Jornadas Hispano-Lusas (Murcia), vol. II, 1985, pp. 1–10.

FJHG, MAOA, JLVC; Departamento de Álgebra, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, Apdo. 1160, 41080 Sevilla, España