Tropismos críticos en $A_n(\mathbf{k})$

M.A. Moreno-Frías*

Abstract

In this work, by using δ-standard bases, we adapt the notion of critical tropism of Lejeune-Teissier, to the case of the Weyl algebra of order n over a field $\mathbf{k}$.

Introducción

El objetivo de esta comunicación es adaptar la noción de Tropismo Crítico de Lejeune-Teissier (ver [6]), a un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$. Para ello, hemos adaptado al caso diferencial los trabajos de A. Assi en [1] y [2] para el caso conmutativo, en concreto para anillos de polinomios con coeficientes en un anillo conmutativo unitario, al caso de los operadores diferenciales lineales con coeficientes polinomiales.

En la Sección 1 introducimos las notaciones y definiciones necesarias para el posterior desarrollo del trabajo. En la Sección 2, presentamos los resultados más importantes y necesarios para asegurar la existencia de ciertos racionales que llamamos tropismos críticos. En el caso de una variable, los tropismos críticos representan las pendientes de un $A_1(\mathbf{k})$-módulo (ver [3]) y en el caso de varias variables, los tropismos críticos están relacionados con los abanicos de Gröbner de un $A_n(\mathbf{k})$-módulo (ver [4]).

1 Notaciones y definiciones

Salvo mención expresa de lo contrario, la letra $\mathbf{k}$ designará un cuerpo de característica arbitraria. Notaremos por $A_n(\mathbf{k}) = \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n; \partial_1, \cdots, \partial_n]$ el álgebra de los operadores diferenciales lineales con coeficientes polinomiales en n variables.

Sea $P = \sum_{(\beta,\alpha)} c_{\beta,\alpha} X^\beta \partial^\alpha$ un elemento no nulo de $A_n(\mathbf{k})$, donde $\beta, \alpha \in \mathbf{N}^n$ y $c_{\beta,\alpha} \in \mathbf{k}$.

Definición 1.1. Se llama polígono de Newton de P al conjunto

$$\mathcal{N}(P) = \{(\beta, \alpha) : c_{\beta,\alpha} \neq 0\}.$$

*Parcialmente subvencionado por FQM-218.

Sea $d \in (-\infty, -1)$, consideremos la forma lineal

$$\begin{array}{rcl} L_d : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ (b, a) & \longrightarrow & \dfrac{b}{d} + a \end{array}$$

Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}$, notaremos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Definición 1.2. ([4]) Sea P un operador diferencial no nulo en $A_n(\mathbf{k})$, se llama L_d-orden de P, y se denota por $ord_{L_d}(P)$, el máximo de $L_d\left(|\beta|, |\alpha|\right)$ donde $(\beta, \alpha) \in \mathcal{N}(P)$.

Consideremos

$$F_k^d = \left\{P \in A_n(\mathbf{k}) : ord_{L_d}(P) \leq k\right\},$$

se denota por $F_\bullet^d(A_n(\mathbf{k})$ la filtración inducida por el L_d-orden en $A_n(\mathbf{k})$. El anillo graduado asociado $gr^{L_d}(A_n(\mathbf{k}))$ es isomorfo al anillo graduado $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n, \zeta_1, \cdots, \zeta_n]$ con la graduación definida por la forma lineal L_d.

Definición 1.3. ([4]) Dado $P \in A_n(\mathbf{k})$, definimos el símbolo principal de P respecto a L_d, denotado por $\sigma^{L_d}(P)$, al siguiente elemento de $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_n, \zeta_1, \cdots, \zeta_n]$,

$$\sigma^{L_d}(P) = \sum_{L_d(|\beta|, |\alpha|) = ord_{L_d}(P)} c_{\beta,\alpha} X^\beta \zeta^\alpha.$$

Sea I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$, notaremos por $gr^{L_d}(I)$ el ideal graduado asociado a la filtración inducida por $F_\bullet^d$ sobre I. El ideal $gr^{L_d}(I)$ está engendrado por la familia $\{\sigma^{L_d}(P) : P \in I \setminus \{0\}\}$.

Definición 1.4. Sea I un ideal no nulo en $A_n(\mathbf{k})$, diremos que un subconjunto $\{P_1, \cdots, P_s\}$ es una d-base estandar de I si $\left\{\sigma^{L_d}(P_1), \cdots, \sigma^{L_d}(P_s)\right\}$ genera $gr^{L_d}(I)$.

2 Tropismos críticos

Lema 2.1. *Sean $-\infty < d_1 < d_2 < -1$ e I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$. Supongamos que $gr^{L_{d_2}}(I) \subseteq gr^{L_{d_1}}(I)$. Sea $M_{b_0 a_0} = \sum_{|\beta| = b_0, |\alpha| = a_0} c_{\beta\alpha} X^\beta \zeta^\alpha$ un polinomio bihomogéneo en $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$. Se tiene que: si $M_{b_0 a_0} \in gr^{L_{d_1}}(I)$ entonces existe $P \in I$ tal que $\sigma^{L_{d_1}}(P) = M_{b_0 a_0}$ y $ord_{L_{d_2}}(P) = a_0 + b_0/d_2$.*

Para la demostración de este lema, siguiendo [1], notamos

$$v_1 = a_0 + \frac{b_0}{d_1}, \qquad \text{y} \qquad v_2 = a_0 + \frac{b_0}{d_2}.$$

- Si $v_1 = v_2$ entonces obtenemos el resultado.

- Si $v_1 \neq v_2$ consideramos el conjunto

$$U = \left\{(a,b) \in \mathbf{N}^2 : a + \frac{b}{d_1} \leq v_1, \quad a + \frac{b}{d_2} \geq v_2\right\}.$$

Se tiene que U es un conjunto finito, por tanto $a + \dfrac{b}{d_2}$ con $(a,b) \in U$, es un conjunto finito de valores. Sean éstos, una vez ordenados

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_s = v_2.$$

Se demuestra por una doble recurrencia sobre el conjunto $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s\}$ que para todo $(a,b) \in U$ obtenemos el resultado.

Lema 2.2. *Con las mismas hipótesis del lema anterior, para todo $d \in (-\infty, -1)$ con $-\infty < d_1 < d < d_2 < -1$, se tiene que $gr^{L_{d_2}}(I) \subseteq gr^{L_d}(I) \subseteq gr^{L_{d_1}}(I)$.*

Para demostrar $gr^{L_{d_2}}(I) \subseteq gr^{L_d}(I)$, siguiendo [1], tomamos un elemento $P \in I$ y suponemos que

$$\sigma^{L_{d_2}}(P) = \sum_{i=1}^{s} M_{b_i a_i} \qquad \text{donde} \qquad M_{b_i a_i} = \sum_{i=1}^{s} c_{\beta\alpha} X^{\beta} \zeta^{\alpha},$$

entonces aplicando las hipótesis podemos afirmar que $M_{b_i a_i} \in gr^{L_{d_1}}(I)$ para todo $i = 1, \cdots, s$. Aplicando el Lema 2.1 podemos afirmar que existe $P_i \in I$ tal que $\sigma^{L_d}(P_i) = M_{b_i a_i} \in gr^{L_d}(I)$. A continuación demostramos que $gr^{L_d}(I) \subseteq gr^{L_{d_1}}(I)$.

Como consecuencia de los lemas anteriores tenemos el siguiente resultado,

Corolario 2.3. *Sean d_1, d et d_2 tales que $-\infty < d_1 < d < d_2 < -1$ e I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$. Si $gr^{L_{d_2}}(I) = gr^{L_{d_1}}(I)$ entonces $gr^{L_{d_2}}(I) = gr^{L_d}(I) = gr^{L_{d_1}}(I)$.*

Lema 2.4. *Sea $d \in (-\infty, -1)$ con $d \in \mathbf{R}$ e I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$. Supongamos que $gr^{L_d}(I)$ está engendrado por polinomios bihomogéneos, entonces existen $d_1, d_2 \in (-\infty, -1)$ tales que $-\infty < d_1 < d < d_2 < -1$ y para todo $e \in [d_1, d_2]$ se tiene que $gr^{L_e}(I) = gr^{L_d}(I)$.*

La demostración puede seguirse en [1].

Corolario 2.5. *Sean $d \in (-\infty, -1)$ con d irracional e I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$, entonces existen $d_1, d_2 \in (-\infty, -1)$ tales que $-\infty < d_1 < d < d_2 < -1$ y para todo $e \in [d_1, d_2]$ se tiene $gr^{L_e}(I) = gr^{L_d}(I)$.*

Lema 2.6. *Sean $d \in (-\infty, -1)$ con $d \in \mathbf{Q}$ e I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$, entonces existe $d' \in (-\infty, -1)$ con $-\infty < d' < d < -1$ tal que para todo $\delta \in (d', d)$ se tiene $gr^{L_\delta}(I) = gr^{L_{d'}}(I)$.*

Para la demostración de este lema, introducimos ciertas notaciones y definiciones.

Sea $(\mathbf{N}^n, <_{diag})$ el orden diagonal sobre $\mathbf{N}^n$. Definimos sobre $\mathbf{N}^{2n}$ un orden total ∇,

$$(\beta,\alpha)\nabla(\beta',\alpha') \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha <_{diag} \alpha' \\ \text{ó} \\ \alpha = \alpha' \qquad \text{y} \quad \beta <_{diag} \beta'. \end{cases}$$

Consideramos la forma lineal sobre $\mathbf{N}^{2n}$, $L'(\beta,\alpha) = |\beta| + |\alpha|$. Sea $<$ el siguiente orden total sobre $\mathbf{N}^{2n}$

$$(\beta,\alpha) < (\beta',\alpha') \Longleftrightarrow \begin{cases} L'(\beta,\alpha) < L'(\beta',\alpha') \\ \text{o} \\ L'(\beta,\alpha) = L'(\beta',\alpha') \quad \text{y} \quad (\beta,\alpha)\nabla(\beta',\alpha'). \end{cases}$$

Sea $f = \sum_{(\beta,\alpha)} c_{\beta,\alpha} X^\beta \zeta^\alpha \in \mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n;\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$, $f \neq 0$. Consideramos $L'(f) = \text{máx}\{L'(\beta,\alpha) : c_{\beta,\alpha} \neq 0\}$ y notaremos $\overline{in}(f) = \sum_{L'(\beta,\alpha)=L'(f)} c_{\beta,\alpha} X^\beta \zeta^\alpha$ y $\overline{M}(f) = c_{\beta_0,\alpha_0} X^{\beta^0} \zeta^{\alpha^0}$ donde $(\beta_0,\alpha_0) = \text{máx}_\nabla \{(\beta,\alpha) : L'(\beta,\alpha) = L'(f)\}$.

Dado un ideal J de $\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n;\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$, notaremos en $\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n;\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$, los siguientes ideales

$$\overline{in}(J) = \langle \overline{in}(f) : f \in J \setminus \{0\} \rangle \qquad \text{y} \qquad \overline{M}(J) = \langle \overline{M}(f) : f \in J \setminus \{0\} \rangle.$$

Aplicando el algoritmo de Castro-Narváez (ver [5]) podemos calcular $\{P'_1,\cdots,P'_n\}$ un sistema generador de I que es una base estándar relativa a la forma lineal L_d. Sea $J = gr^{L_d}(I) \subseteq \mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n;\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$. Existe $\{g_1,\cdots,g_r\}$ (ver [2]) un sistema generador de J tal que $\overline{M}(J) = \langle \overline{M}(g_1),\cdots,\overline{M}(g_r)\rangle$ y tal que para todo $g \in J$ existen $\lambda_1,\cdots,\lambda_r \in \mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n;\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$, L_d-homogéneos tales que $g = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i$.

Sea ahora para todo $i = 1,\cdots,r$, $P_i \in I$ tal que $\sigma^{L_d}(P_i) = g_i$ y d'_i el mínimo racional, $d'_i \in (-\infty,-1)$ tal que $\forall e \in (d'_i,d)$, $\sigma^{L_e}(P) = \overline{in}(g_i)$. Sea $d' = \text{máx}\{d_1,\cdots,d_r\}$. Se verifica que para todo $e \in [d',d)$ tenemos que $gr^{L_e}(I) = \overline{in}(J)$ y con ello obtenemos el resultado.

Lema 2.7. *Sea $d \in (-\infty,-1)$ con $d \in \mathbf{Q}$ e I un ideal (a la izquierda) en $A_n(\mathbf{k})$, entonces existe $d'' \in (-\infty,-1)$ con $-\infty < d < d'' < -1$ tal que para todo $e \in (d,d'')$ se tiene $gr^{L_e}(I) = gr^{L_{d''}}(I)$.*

Análogo a la demostración del Lema 2.6, considerando la siguiente forma lineal en $\mathbf{N}^{2n}$, $L''(\beta,\alpha) = -|\beta| - |\alpha|$.

Con estos resultados podemos demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 2.8. *Sea I un ideal (a la izquierda) no nulo de $A_n(\mathbf{k})[\partial]$; entonces existe una familia finita $\{d_1,\cdots,d_s\}$ de racionales tales que*

$$-\infty < d_1 < d_2 < \cdots < d_s < -1$$

y si notamos $d_0 = -\infty$ y $d_{s+1} = -1$, entonces para todo $j = 1, \cdots, s+1$ se tiene que $gr^{L_d}(I)$ es independiente de d, siendo $d_{j-1} < d < d_j$.

Definición 2.9. Los racionales $d_1, \cdots, d_s$, construidos en el Teorema 2.8, se llaman tropismos críticos del ideal I.

References

[1] A. Assi. *Constructions effectives en algèbre commutative.* PhD. thesis, Grenoble, 1991.

[2] A. Assi. *Standard Bases, Critical Tropisms and Flatness.* AAECC 4, 197-215,(1993).

[3] A. Assi, F. Castro-Jiménez and J.M. Granger. *Détermination des pentes des $\mathcal{D}$-modules.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, (1995), 193-198.

[4] A. Assi, F. Castro-Jiménez and J.M. Granger. *The Gröbner fan of a A_n-module.* Journal of Pure and Applied Algebra. 150 (2000), 27-39

[5] F.J. Castro Jiménez and L. Narváez Macarro. *Homogenising differential operators.* Prepublicación del Dpto. de Álgebra. Universidad de Sevilla. Junio 1997.

[6] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier. *Transversalité, polygone de Newton et installations. "Singularités à Cargèse.* Asterisque, 7-8 (1973) 75-119.

M.A. Moreno-Frías. Facultad de Ciencias. Dpto. de Matemáticas. Apdo. 40. 11510, Puerto Real (Cádiz)
e-mail: mariangeles.moreno@uca.es