Reducción de singularidades en superficies de Puiseux

José M. Tornero*

Abstract

This is an outline from the last part of the author's thesis, recently presented, where the following problem is treated: Given a Puiseux surface (that is, an algebroid embedded surface admitting an equation whose roots are Puiseux power series), is there a resolution procedure such that, in each step, the obtained surface reamins being a Puiseux one? The answer is affirmative, although there is still a lot to know about these varieties.

1 Superficies de Puiseux. Exponentes distinguidos

Consideremos $\mathbf{C}$ (o un cuerpo cualquiera siempre que sea algebraicamente cerrado y de característica nula) y sean X e Y variables formalmente independientes sobre $\mathbf{C}$ y $m \in \mathbf{N}$ un natural fijado en lo que sigue. Tenemos los siguientes cuerpos y anillos:

$$K = \mathbf{C}((X,Y)) \subset L = \mathbf{C}\left(\left(X^{1/m}, Y^{1/m}\right)\right)$$

$$R = \mathbf{C}[[X,Y]] \subset S = \mathbf{C}\left[\left[X^{1/m}, Y^{1/m}\right]\right]$$

La extensión de cuerpos es normal y finita, y tiene como grupo de Galois a $G \simeq C_m \times C_m$, donde notaremos los morfismos de G por

$$\begin{array}{rcl} (a,b) : L & \longrightarrow & L \\ X^{1/m} & \longmapsto & \delta^a X^{1/m} \\ Y^{1/m} & \longmapsto & \delta^b Y^{1/m} \end{array}$$

con δ (fijado en lo sucesivo) perteneciente a $\mathcal{R}(m)$, el conjunto de raíces primitivas m–ésimas de la unidad.

Los elementos de S se denominarán *series de Puiseux*. El caso más conocido y mejor estudiado ([4], [2]) es el caso cuasiordinario: esto es, las series $\zeta \in S$ verificando

$$\zeta - (a,b)(\zeta) = X^{\lambda} Y^{\mu} u_{(a,b)}(X,Y), \text{ con } u_{(a,b)}(0,0) \neq 0, \ \forall\, (a,b) \in G.$$

*Subvencionado por FQM-218.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{S}$ una superficie algebroide sumergida. Entonces $\mathcal{S}$ se dirá una superficie de Puiseux cuando exista una ecuación de $\mathcal{S}$ cuyas raíces sean series de Puiseux.

Si $\mathcal{S}$ es de Puiseux y F es una ecuación de $\mathcal{S}$ que es el polinomio mínimo de una serie de Puiseux ζ diremos, por abuso de lenguaje, que $\mathcal{S}$ está determinada por ζ.

Sea $\zeta \in S$, de la forma

$$\zeta = \sum_{(i,j)\in\Delta\subset\mathbf{N}^2} c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m},$$

con $c_{ij} \in \mathbf{C}$. El conjunto Δ se denominará la nube de puntos asociada a (o simplemente de) ζ. Por abuso de lenguaje denominaremos a los pares $(i,j) \in \Delta$ los exponentes de ζ.

Definición 1.2. Dada una serie de Puiseux $\zeta = \sum c_{ij} X^{i/m} Y^{j/m}$, diremos que el conjunto $E = \{(i_1, j_1), ..., (i_t, j_t)\} \subset \Delta$ forman un conjunto de exponentes privilegiados si verifican que

$$K(\zeta) = K\left(X^{i_1/m} Y^{j_1/m}, ..., X^{i_t/m} Y^{j_t/m}\right).$$

Es posible dar un procedimiento constructivo (en sentido amplio, hablando como estamos de series eventualemente infinitas) que, a partir de una serie de Puiseux, nos dé un conjunto de exponentes privilegiados. Este procedimiento se basa en el siguiente resultado:

Lema 1.3. *Sean los conjuntos de monomios*

$$S_1 = \left\{X^{i_1/m} Y^{j_1/m}, ..., X^{i_s/m} Y^{j_s/m}\right\}, \ \ S_2 = S_1 \cup \left\{X^{i_0/m} Y^{j_0/m}\right\},$$

tales que el máximo común denominador de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & ... & i_s \\ 0 & m & j_1 & ... & j_s \end{pmatrix}$$

concide con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} m & 0 & i_1 & ... & i_s & i_0 \\ 0 & m & j_1 & ... & j_s & j_0 \end{pmatrix}.$$

En estas condiciones $K(S_1) = K(S_2)$.

Demostración. Ver [4] o [2] para el caso cuasiordinario. La demostración general se sigue del capítulo VII de [1]. □

Corolario 1.4. *Unos exponentes privilegiados de ζ determinan $[K(\zeta) : K]$.*

2 Cono tangente y curvas peritidas en superficies de Puiseux

En esta sección nos ocuparemos únicamente de superficies de Puiseux *irreducibles*. Es sencillo ver que el problema general de conocer el cono tangente y las curvas permitidas de una superficie de Puiseux se puede reducir a estudiar sus componentes irreducibles.

Nota 2.1. Sea pues $\mathcal{S}$ una superficie de Puiseux determinada por ζ. Un conjunto de exponentes distinguidos y el orden de ζ caracterizan la multiplicidad de la superficie. Esto es claro, ya que una ecuación de la superficie viene dada por

$$F(Z) = \prod_{i=1}^{n} (Z - \zeta_i)\,,$$

donde $\zeta = \zeta_1, ..., \zeta_n$ son los posibles conjugados de ζ. Entonces tenemos dos posibilidades:

(I) La serie ζ tiene orden $\lambda < 1$ (clásicamente denominado "caso no transversal"). Entonces el orden de F es λn, fácilmente calculable a partir de los exponentes distinguidos.

(II) La serie ζ tiene orden $\lambda \geq 1$ ("caso transversal"). En este caso el orden de F es n, también calculable a partir de unos exponentes distinguidos. Obsérvese que, en este caso, F es una ecuación de Weierstrass.

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie de Puiseux definida por ζ, y sea $\overline{\zeta}$ su forma inicial. Entonces:*

(a) En el caso transversal el cono tangente de $\mathcal{S}$ es una potencia t–ésima de una forma irreducible de grado s. Este forma es el polinomio mínimo de $\overline{\zeta}$ y los números s y t se pueden calcular a partir de unos exponentes distinguidos de ζ y $\overline{\zeta}$.

(b) En el caso no transversal el cono tangente de $\mathcal{S}$ es un producto de planos. Podemos conocer estos a partir de la descomposición en factores irreducibles (en $\mathbf{C}[[X^{1/m}, Y^{1/m}]]$) de $\overline{\zeta}$ y la multiplicidad de estos planos en el cono tangente a partir de unos exponentes distinguidos de ζ.

Nota 2.3. Algunos datos de interés en este sentido son:

(i) A diferencia del caso cuasiordinario, no podemos acotar de forma universal el número de planos que aparecen en una superficie de Puiseux genérica. De hecho, es sencillo dar ejemplos de superificies con $m-1$ planos, con las notaciones anteriores.

(ii) Los exponentes de una serie (no digamos ya unos exponentes distinguidos) no contienen toda la información en el caso no transversal: es posible dar series con el mismo Δ pero diferentes planos tangentes.

Proposición 2.4. *Sea S una superficie de Puiseux definida por ζ. Entonces:*

(a) En el caso transversal $(Z, c(X,Y))$ es curva permitida si y sólo si $c(X,Y)|\zeta$.

(b) En el caso no transversal podemos suponer que no hay curvas permitidas.

3 Reducción de singularidades: series ν–cuasiordinarias

Fijemos una superficie $\mathcal{S}$ de Puiseux, con una ecuación $F \in \mathbf{C}[[X,Y]][Z]$. En lo sucesivo, cuando nos refiramos a transformaciones monoidales (cuadráticas), estaremos hablando, salvo mención expresa en otro sentido de transformaciones monoidales (cudráticas) formales estrictas. La reducción de singularidades de una superficie de Puiseux transversal es bastante natural; tenemos los siguientes resultados:

Proposición 3.1. *Supongamos que $\mathcal{S}$ está definida por una serie ζ transversal. Entonces:*

(a) Si realizamos una transformación monoidal de centro $(Z, c(X,Y))$ la superficie transformada es de Puiseux.

(b) Si realizamos una transformación cuadrática en las direcciones $(1:0:0)$ ó $(0:1:0)$ la superficie transformada es de Puiseux e irreducible.

(c) Si realizamos una transformación cuadrática en otra dirección la superficie podría ser reducible, aunque todas sus componentes serían de Puiseux. El que esto ocurra o no depende sólo de $\mathcal{S}$ (o sea, de ζ) y no de la dirección y es predecible a partir de unos exponentes distinguidos de ζ.

El caso no transversal se presenta más complejo: es sencillo dar series de Puiseux cuyos polinomios mínimos, tras una transformación cuadrática, no tienen como raíces series de Puiseux[1]. Naturalmente, esto no implica que la superficie no sea de Puiseux, pero no disponemos en la actualidad de herramientas simples para decidir sobre esta cuestión[2].

Definición 3.2. Sea $\zeta \in \mathbf{C}\left[\left[X^{1/m}, Y^{1/m}\right]\right]$. La serie ζ se dice ν–cuasiordinaria cuando ζ se puede escribir de la forma

$$\zeta = X^{a/m} Y^{b/m} u\left(X^{1/m}, Y^{1/m}\right), \text{ con } u(0,0) \neq 0.$$

Una superficie de Puiseux definida por series ν–cuasiordinarias se dice así mismo una superficie ν–cuasiordinaria.

Las series ν–cuasiordinarias, transversales o no, verifican el resultado que buscamos.

Lema 3.3. *Supongamos que $\mathcal{S}$ es una superficie ν–cuasiordinaria. Entonces una transformación cuadrática o monoidal de $\mathcal{S}$ es nuevamente una superficie de Puiseux ν–cuasiordinaria.*

Para cerrar el problema de dar un procedimiento que resuelva las singularidades de una superficie de Puiseux basta entonces con dar una forma de pasar de transformar una superficie no transversal en ν–cuasiordinaria, ya que a éstas le podemos aplicar cualquiera de los procedimientos de resolución conocidos; por ejemplo, la estrategia Levi–Zariski ([3]) consistente en explotar en cada caso centros permitidos de dimensión máxima.

Esto se logra con el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sea $\mathcal{S}$ definida por una serie no transversal ζ. Entonces existe un $p \in \mathbf{Z}_+$ tal que en cualquier sucesión de la forma*

$$\mathcal{S}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(n-1)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{S}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{S},$$

donde los morfismos sean transformaciones totales centradas en (X,Y), se ha de tener que $\mathcal{S}^{(p)}$ está definida por series de Puiseux ν–cuasiordinarias.

[1] Un ejemplo simple es la serie $\zeta = X^{2/5} + Y^{2/5}$.

[2] A pesar de ello, conviene señalar que éste es un campo muy activo de investigación desde la aparición del trabajo de McDonald ([5]). En particular, las generalizaciones e implementaciones llevadas a cabo por F. Aroca y J. Cano han sido de gran ayuda para esta parte.

Nota 3.5. El número p se puede hallar a partir, por ejemplo, del diagrama de Newton de F.

Nota 3.6. De forma parecida al caso de las explosiones de superficies transversales, podemos perder irreducibilidad y, de ser así, es independiente de la dirección y predecible a partir de unos exponentes distinguidos.

References

[1] Bourbaki, N.: *Algèbre.* Actalités Scientifiques et Industrielles, 1179. Hermann, 1952.

[2] Herrera, F.J.: *Ramificación de valoraciones sobre superficies algebroides.* Tesis Doctoral, Univ. de Sevilla, 1981.

[3] Levi, B.: *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche.* Atti Acad. Sci. Torino, 33 (1897), 66–86.

[4] Lipman, J.: *Quasi–ordinary singularities of embedded surfaces.* Tesis Doctoral, Harvard Univ., 1965.

[5] McDonald, J.: *Fiber polytopes and fractional power series.* J. Pure App. Algebra, 104 (1995), 213–233.

José M. Tornero; Depto. de Álgebra, Univ. de Sevilla. Apdo. 1160, 41080 Sevilla (Spain)
E–mail: tornero@algebra.us.es