SOLUCIONES TIPO A

Ejercicio 1: Sea $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ cuya expresión en fracción contínua es $\alpha = [q_0, q_1, \ldots, q_n]$. Supongamos que q_i es par para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, y que los restos al aplicar el algoritmo de Euclides a a y b verifican $r_0 < \frac{b}{2}$, $r_i < \frac{r_{i-1}}{2}$. Calcular la expresión de 2α en fracción contínua en función de la de α.

Solución: Sea $\alpha = a/b$, m.c.d.$(a, b) = 1$. Por ser $\alpha = [q_0, q_1, \ldots, q_n]$ sabemos que

$$a = q_0 b + r_0, \quad r_0 < b$$

$$b = q_1 r_0 + r_1, \quad r_1 < r_0$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2, \quad r_2 < r_1$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \quad r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1}.$$

Aplicando el algoritmo de Euclides a $2\alpha = 2a/b$ y teniendo en cuenta que $q_i = 2q_i'$, $r_i < \frac{r_{i-1}}{2}$, tenemos que:

$$2a = 2q_0 b + 2r_0 \quad 2r_0 < b$$

$$b = q_1' 2r_0 + r_1 \quad r_1 < r_0 < 2r_0$$

$$2r_0 = 2q_2 r_1 + 2r_2 \quad 2r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3' 2r_2 + r_3 \quad r_3 < r_2 < 2r_2$$

$$\vdots$$

Por tanto $2\alpha = [2q_0, q_1', 2q_2, q_3', \ldots, q_{n-1}', 2q_n]$ si n es par, $2\alpha = [2q_0, q_1', 2q_2, q_3', \ldots, 2q_{n-1}, q_n']$ si n es impar.

Ejercicio 2: A) Resolver la siguiente ecuación de recurrencia $f_n = 2f_{n-1} + 3f_{n-2} + (-1)^n$, $f_0 = f_1 = 1$.
B) Calcular la función generatríz de la ecuación de recurrencia anterior.

Solución: Sea $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcccccccc}
F(x) & = & f_0 & + & f_1 x & + & f_2 x^2 & + & f_3 x^3 & + & \ldots \\
2xF(x) & = & & & 2f_0 x & + & 2f_1 x^2 & + & 2f_2 x^3 & + & \ldots \\
3x^2 F(x) & = & & & & & 3f_0 x^2 & + & 3f_1 x^3 & + & \ldots \\
\\
F(x) - 2xF(x) - 3x^2 F(x) & = & f_0 & + & (f_1 - 2f_0)x & + & (-1)^2 x^2 & + & (-1)^3 x^3 & + & \ldots
\end{array}$$

Luego

$$(1 - 2x - 3x^2)F(x) = 1 - x + (-1)^2 x + (-1)^3 x^3 + \ldots = \sum_{n \geq 0} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

Por tanto, la función generatriz es

$$F(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x-3x^2)} = \frac{1}{(1+x)^2(1-3x)}$$

A partir de la función generatríz podemos obtener la fórmula cerrada para la ecuación de recurrencia.

$$F(x) = \frac{1}{(1-3x)(1+x)^2} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

con $A = 9/16$, $B = 3/16$, $C = 1/4$. De aquí

$$f_n = \frac{1}{16}(9 \cdot 3^n + 3(-1)^n + 4(n+1)(-1)^n).$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:
Calcular una solución de la recurrencia homogénea asociada, $f_n = 2f_{n-1} + 3f_{n-2}$:
Las raices de $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x = -1, 3$, luego la solución es

$$f_n^{(h)} = A(-1)^n + B3^n.$$

Calcular una solución particular de la ecuación de recurrencia:
La solución particular la buscamos de la forma

$$f_n^{(p)} = Cn(-1)^n.$$

Sustituyendo tenemos que

$$Cn(-1)^n = 2C(n-1)(-1)^{n-1} + 3C(n-2)(-1)^{n-2} + (-1)^n$$
$$Cn(-1)^2 = 2C(n-1)(-1) + 3C(n-2) + (-1)^2,$$

luego $C = \frac{1}{4}$. La solución es

$$f_n = A(-1)^n + B3^n + \frac{1}{4}n(-1)^n.$$

Imponiendo que $f_0 = f_1 = 1$ obtenemos que

$$f_n = \frac{7}{16}(-1)^n + \frac{9}{16}3^n + \frac{1}{4}n(-1)^n.$$

Ejercicio 3: Responder a las cuestiones siguientes:

1. Se considera la función

$$\{0, 1, 2, \ldots, 49\} \longrightarrow \mathbb{Z}_+, \quad x \longrightarrow \binom{49}{x}$$

   Hallar los valores de x para los que alcanza su máximo. Como simple información, y sin relevancia para el problema, se indica que el máximo es 63.205.303.218.876

2. Sea $b > 2$ un entero y sea $n = [1, 1, 0, 0, 1]$ escrito en base b. Escribir n^2 en esa forma, es decir, dar la lista de sus cifras.

3. Sea $n > 5$, F_n el n-ésimo número de Fibonacci. Demostrar que $\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| < 1$ ¿Cuándo es positiva y cuándo negativa la diferencia $\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}$?

4. Sea $R = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 1013)[x]$. Descomponer en factores irreducibles en R el polinomio $f(x) = x^{1013} + 1012x$

Solución:
1) Por la estructura del triángulo de Tartaglia, el máximo se alcanza en $x = 24, 25$
2) $(1 + b^3 + b^4)^2 = 1 + 2b^3 + 2b^4 + b^6 + 2b^7 + b^8$, luego $n^2 = [1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 1]$.
3) Por el teorema de Cassini sabemos que

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

luego

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}}$$

Por tanto $\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \frac{1}{F_nF_{n-1}} < 1$ y la diferencia es positiva si y sólo si n es par.
4) Sabemos que $a^p \equiv a \pmod{p}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, es decir, las raices del polinomio $x^p - x \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot p$ son los elementos de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot p$. Como $f(x) = x^{1013} + 1012x = x^{1013} - x$ es

$$f(x) = \prod_{a\in\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot 1013} (x - a).$$

Ejercicio 4: Se considera como cuerpo base $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$, que es el cuerpo de las congruencias en $\mathbb{Z}$ módulo 2, y el anillo $R = k[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en k. Se considera también el polinomio $f = x^5 + x + 1 \in R$ y el espacio vectorial R' de las congruencias en R módulo f. Se recuerda que cada una de estas congruencias viene representada, de manera única, por un polinomio de grado a lo más 4, y esta representación es la que debe ser usada en la resolución de este problema. Esto significa que 5 es la dimensión de R' sobre k y una base es $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. La igualdad en R' es lo mismo que $\equiv (\mathrm{mod} f)$ en R y se usarán indistintamente.
1).- Calcular las congruencias de x^6, x^7 y x^8, es decir, calcular polinomios f_6, f_7, f_8 de grado no superior a 4 tales que

$$x^6 \equiv f_6(\mathrm{mod} f), \quad x^7 \equiv f_7(\mathrm{mod} f), \quad x^8 \equiv f_8(\mathrm{mod} f)$$

2).- ¿Existe un $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x^n \equiv 1(\mathrm{mod} f)$? Explicar por qué.
3).- Calcular $(x^4 + x^3 + x)^2$ en R'. Calcular x^{21} en R'.
4).- Demostrar que el subespacio vectorial W de R' definido por $W = \{w \in R' \mid w^2 = w\}$ tiene como ecuaciones implícitas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde el vector genérico es $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Calcular una base de W.
5).- Calcular la descomposición factorial de f en R.

Solución:
1) $x^5 = x + 1$, $x^6 = x^2 + x$, $x^7 = x^3 + x^2$ y $x^8 = x^4 + x^3$.
2) Basta tener en cuenta que el número de polinomios de grado menor que 5 es finito, luego las potencias de x no pueden ser todas distintas. Si $x^r \equiv x^s$, entonces $x^n \equiv 1$, con $n = r - s$.
3)

$$(x^4 + x^3 + x)^2 = x^8 + x^6 + x^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + x^2 = x^4 + x^3 + x.$$

$$x^{21} = x^8x^7x^6 = x^3(x + 1)x^2(x + 1)x(x + 1) = x^6(x^2 + 1)(x + 1) =$$

$$= x(x+1)(x^2+1)(x+1) = x(x^4+1) = x^5 + x = x + 1 + x = 1.$$

4) Sea $w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Tenemos que

$$w^2 = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6 + a_4x^8 = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3(x^2+x) + a_4(x^4+x^3).$$

Igualando coeficientes se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & a_0 \\ a_1 & = & a_3 \\ a_2 & = & a_1 + a_3 \\ a_3 & = & a_4 \\ a_4 & = & a_2 + a_4 \end{array}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_3 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_3 + a_4 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \end{array}$$

Base de W es $\{1, x^4 + x^3 + x\}$.

5) m.c.d.$(x^5 + x + 1, x^4 + x^3 + x) = x^3 + x^2 + 1$, luego

$$x^5 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$