Álgebra Efectiva (20/09/2002)

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio 1: (2 puntos) Se considera el cuerpo base $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$, el polinomio

$$f(Z) = Z^9 + 2\,Z^8 + Z^7 + 2\,Z^6 + Z^4 + Z^3 + 2$$

y el código cíclico de dimensión 13 generado por él. Se pide:
1).- Comprobar que el planteamiento del código tiene sentido, dividiendo $Z^{13} - 1$ por f (dar cociente y resto).
2).- En un cierto proceso de transmisión de información, se transmite una palabra del código, y se recibe la palabra

$$2\,Z^{12} + 2\,Z^{10} + 2\,Z^8 + Z^6 + 2\,Z^5 + 2\,Z^2 + 2\,Z + 1\,.$$

Se sabe que la transmisión ha introducido dos errores como máximo. Hallar la palabra transmitida.

NOTA: Como ayuda, se incluye la parte no trivial de la correspondiente tabla de síndromes y errores.

Errores	Síndromes
$Z^9 + 1$	$Z^8 + 2\,Z^7 + Z^6 + 2\,Z^4 + 2\,Z^3 + 2$
$2\,Z^9 + 1$	$2\,Z^8 + Z^7 + 2\,Z^6 + Z^4 + Z^3$
$Z^9 + 2$	$Z^8 + 2\,Z^7 + Z^6 + 2\,Z^4 + 2\,Z^3$
$2\,Z^9 + 2$	$2\,Z^8 + Z^7 + 2\,Z^6 + Z^4 + Z^3 + 1$
$Z^{10} + 1$	$Z^6 + 2\,Z^5 + Z^4 + 2\,Z^3 + Z + 2$
$2\,Z^{10} + 1$	$2\,Z^6 + Z^5 + 2\,Z^4 + Z^3 + 2\,Z$
$Z^{10} + 2$	$Z^6 + 2\,Z^5 + Z^4 + 2\,Z^3 + Z$
$2\,Z^{10} + 2$	$2\,Z^6 + Z^5 + 2\,Z^4 + Z^3 + 2\,Z + 1$
$Z^{11} + 1$	$Z^7 + 2\,Z^6 + Z^5 + 2\,Z^4 + Z^2 + Z + 1$
$2\,Z^{11} + 1$	$2\,Z^7 + Z^6 + 2\,Z^5 + Z^4 + 2\,Z^2 + 2\,Z + 1$
$Z^{11} + 2$	$Z^7 + 2\,Z^6 + Z^5 + 2\,Z^4 + Z^2 + Z + 2$
$2\,Z^{11} + 2$	$2\,Z^7 + Z^6 + 2\,Z^5 + Z^4 + 2\,Z^2 + 2\,Z + 2$
$Z^{12} + 1$	$Z^8 + 2\,Z^7 + Z^6 + 2\,Z^5 + Z^3 + Z^2 + 1$
$2\,Z^{12} + 1$	$2\,Z^8 + Z^7 + 2\,Z^6 + Z^5 + 2\,Z^3 + 2\,Z^2 + 1$
$Z^{12} + 2$	$Z^8 + 2\,Z^7 + Z^6 + 2\,Z^5 + Z^3 + Z^2 + 2$
$2\,Z^{12} + 2$	$2\,Z^8 + Z^7 + 2\,Z^6 + Z^5 + 2\,Z^3 + 2\,Z^2 + 2$

Ejercicio 2: (2 puntos)
A) Resolver la ecuación de recurrencia $f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = 1, \quad n \geq 1$ con $f_1 = 1, f_2 = 0$.
B) Calcular la función generatriz de la ecuación de recurrencia anterior.

Ejercicio 3: (1 punto) La solución general de la relación de recurrencia $f_{n+2}+bf_{n+1}+cf_n = 0$ es del tipo $f_n = b_1+b_2 7^n$. Calcular el valor de las constantes b, c, b_1 y b_2 si las condiciones iniciales son $f_1 = 8, f_2 = 50$.

Ejercicio 4: (2 puntos) Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq m$. Probar, por inducción sobre n

$$Q_n(1, 1, \ldots, 1, \overbrace{2}^{m}, 1, \ldots, 1) = Q_n(1, \ldots, 1) + Q_{m-1}(1, \ldots, 1)Q_{n-m}(1, \ldots, 1).$$

Ejercicio 5: (1 punto) Sean a, b, m, r enteros positivos, $d =$m.c.d.(r, m). Probar que $ra \equiv rb \quad mod(m)$ entonces $a \equiv b \quad mod(m/d)$.