SOLUCIÓN

Ejercicio 1.- Sean m y n dos enteros no nulos. Demostrar que son equivalentes los siguientes enunciados:

1. Existe un homomorfismo de grupos no nulo de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.

2. Los enteros m y n no son primos entre si.

Indicación.- Compruébese que cualquier tal homomorfismo viene determinado por la imagen de $1+\mathbb{Z}_m$ y que, por tanto, equivale a multiplicar por un entero.

Solución.- Comprobemos primero la indicación. Sea $\varphi\colon \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ un homomorfismo de grupos, es claro que

$$\varphi(k+\mathbb{Z}_m) = \varphi(k\cdot(1+\mathbb{Z}_m)) = k\cdot\varphi(1+\mathbb{Z}_m).$$

Luego el homomorfismo está determinado por la imagen de $1+\mathbb{Z}_m$ y equivale a multiplicar por cualquier representante de la clase $\varphi(1+\mathbb{Z}_m)$.

Para probar $1 \Rightarrow 2$ vamos a demostrar el contrarrecíproco. Supongamos entonces que m y n son dos enteros primos entre si. Sea $\varphi\colon \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ un homomorfismo de grupos, vamos a probar que es el homomorfismo nulo. Como φ está bien definido

$$0+\mathbb{Z}_n = \varphi(0+\mathbb{Z}_m) = \varphi(m+\mathbb{Z}_m) = m\cdot\varphi(1+\mathbb{Z}_m).$$

Como m y n son primos entre si, debe ser

$$\varphi(1+\mathbb{Z}_m) = 0+\mathbb{Z}_n.$$

De donde se deduce que φ es el homomorfismo nulo.

Recíprocamente supongamos que m y n no son primos entre si, sea entonces $d = \text{m.c.d}(m,n)$. Consideremos la aplicación no nula

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_m & \to & \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n \\ & k+\mathbb{Z}_m & \mapsto & k(n/d)+\mathbb{Z}_n \end{array}.$$

Comprobemos que φ está bien definida. Sean a y b enteros tales que $a+\mathbb{Z}_m = b+\mathbb{Z}_m$, es decir, $a-b$ es un múltiplo de m. Entonces

$$\varphi(a+\mathbb{Z}_m)-\varphi(b+\mathbb{Z}_m) = \left(a\frac{n}{d}+\mathbb{Z}_n\right)-\left(b\frac{n}{d}+\mathbb{Z}_n\right) = (a-b)\frac{n}{d}+\mathbb{Z}_n = \frac{a-b}{d}n+\mathbb{Z}_n,$$

como $a-b$ es múltiplo de m, también es múltiplo de d, de donde se deduce que $\varphi(a+\mathbb{Z}_m) = \varphi(b+\mathbb{Z}_m)$.

Además

$$\varphi(a+\mathbb{Z}_m)+\varphi(b+\mathbb{Z}_m)=\left(a\frac{n}{d}+\mathbb{Z}_n\right)+\left(b\frac{n}{d}+\mathbb{Z}_n\right)=(a+b)\frac{n}{d}+\mathbb{Z}_n=$$
$$=\varphi\left((a+b)+\mathbb{Z}_m\right),$$

de donde φ es homomorfismo.

Ejercicio 2.- Sea $f\colon \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$ la aplicación definida por $f(a+\mathbb{Z}_{12})=a+\mathbb{Z}_4$. Se pide:

1. Probar que f es un homomorfismo de grupos. Hallar el núcleo y la imagen de f.
2. Exponer los posibles homomorfismos de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$.

Solución.-

1. Veamos primero que f está bien definido. Sean a y b enteros tales que $a+\mathbb{Z}_{12}=b+\mathbb{Z}_{12}$, es decir, $a-b$ es un múltiplo de 12. Entonces

   $$f(a+\mathbb{Z}_{12})-f(b+\mathbb{Z}_{12})=a+\mathbb{Z}_4-b+\mathbb{Z}_4=(a-b)+\mathbb{Z}_4=0+\mathbb{Z}_4.$$

   Como $a-b$ es múltiplo de 12, también lo es de 4, de donde $f(a+\mathbb{Z}_m)=f(b+\mathbb{Z}_m)$.

   Es fácil comprobar que f es homomorfismo, es decir, que $f(a+\mathbb{Z}_{12})+f(b+\mathbb{Z}_{12})=f((a+b)+\mathbb{Z}_{12}$.

   La apluicación es sobreyectiva, la imagen es $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$. El núcleo está formado por los múltiplos de 4 en $\mathbb{Z}/$
   Z_{12}, es decir, $\ker(f)=\{0+\mathbb{Z}_{12},4+\mathbb{Z}_{12},8+\mathbb{Z}_{12}\}$.

2. La indicación del ejercicio 1 también vale para este apartado, luego cualquier homomorfisno de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$ viene definido por la imagen de $1+\mathbb{Z}_{12}$. Así tenemos cuatro posibles homomorfismos, según si $1+\mathbb{Z}_{12}$ va en $0+\mathbb{Z}_4$, $1+\mathbb{Z}_4$, $2+\mathbb{Z}_4$ o $3+\mathbb{Z}_4$.

   La primera aplicación, dada por $f_0(1+\mathbb{Z}_{12})=0+\mathbb{Z}_4$ es el homomorfismo nulo.

   La aplicación dada por $f_1(1+\mathbb{Z}_{12})=1+\mathbb{Z}_4$ es el homomorfismo f del apartado anterior.

   Se comprueba fácilmente que la aplicación dada por $f_2(1+\mathbb{Z}_{12})=2+\mathbb{Z}_4$ está bien definida y es el homomorfismo que lleva los impares de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}$ a $2+\mathbb{Z}_4$ y los pares a $0+\mathbb{Z}_4$.

   Análogamente al primer apartado, se comprueba que la aplicación $f_3(1+\mathbb{Z}_{12})=3+\mathbb{Z}_4$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

   Luego hay cuatro homomorfismos de grupos de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$.

Ejercicio 3.- Sean los grupos $\mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_{10} \cap \mathbb{Z}_{12}$. Se pide:

1. Comprobar que $\mathbb{Z}_{10} \cap \mathbb{Z}_{12} \subset \mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_{12}$. Sea en adelante
$$H = \frac{\mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{Z}_{10} \cap \mathbb{Z}_{12}}.$$
2. Calcular el orden de H. Hallar todos los subgrupos de H indicando cuáles son normales.
3. ¿Es H un grupo cíclico? En caso afirmativo hallar razonadamente todos sus generadores, es decir, todos los $\overline{a}$ tales que $H = \langle \overline{a} \rangle$.

Solución.-

1. Como $\mathbb{Z}_{12} \subset \mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_{12}$, es claro que $\mathbb{Z}_{10} \cap \mathbb{Z}_{12} \subset \mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_{12}$. Además sabemos que $\mathbb{Z}_m + \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{\text{m.c.d}(m,n)}$ y que $\mathbb{Z}_m \cap \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{\text{m.c.m}(m,n)}$, de donde se deduce que
$$H = \frac{\mathbb{Z}_4}{\mathbb{Z}_{60}}.$$
2. Se trata de contar los elementos de H, es decir, los múltiplos de 4 cociente con los de 60, esto es
$$H = \{0+\mathbb{Z}_{60}, 4+\mathbb{Z}_{60}, 8+\mathbb{Z}_{60}, 12+\mathbb{Z}_{60}, 16+\mathbb{Z}_{60}, 20+\mathbb{Z}_{60}, 24+\mathbb{Z}_{60}, 28+\mathbb{Z}_{60},$$
$$32 + \mathbb{Z}_{60}, 36 + \mathbb{Z}_{60}, 40 + \mathbb{Z}_{60}, 44 + \mathbb{Z}_{60}, 48 + \mathbb{Z}_{60}, 52 + \mathbb{Z}_{60}, 56 + \mathbb{Z}_{60}\}.$$
Luego el orden de H es 15.

   También puede llegarse a esta conclusión observando que H es isomorfo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{15}$.

   Por el teorema de Lagrange, el orden de un subgrupo divide al orden del grupo, luego cualquier subgrupo no trivial de H tiene orden 3 o 5. Existen en H dos elementos de orden 3, $20 + \mathbb{Z}_{60}$ y $40 + \mathbb{Z}_{60}$, y cuatro de orden 5, $12 + \mathbb{Z}_{60}$, $24 + \mathbb{Z}_{60}$, $36 + \mathbb{Z}_{60}$ y $48 + \mathbb{Z}_{60}$. Todos los demás elementos, salvo $0 + \mathbb{Z}_{60}$, tienen orden 15.

   Así que
$$H_1 = \{0 + \mathbb{Z}_{60}, 20 + \mathbb{Z}_{60}, 40 + \mathbb{Z}_{60}\} = \langle 20 + \mathbb{Z}_{60} \rangle$$
es el único subgrupo de orden 3 y
$$H_2 = \{0 + \mathbb{Z}_{60}, 12 + \mathbb{Z}_{60}, 24 + \mathbb{Z}_{60}, 36 + \mathbb{Z}_{60}, 48 + \mathbb{Z}_{60}\} = \langle 12 + \mathbb{Z}_{60} \rangle$$
es el único subgrupo de orden 5.

   Los subgrupos de H son, por tanto, $\{0 + \mathbb{Z}_60\}$, H, H_1 y H_2. Como H es abeliano todos sus subgrupos son normales.

3. Es evidente que H es cíclico, pues tiene orden 15 y elementos del mismo orden. Cualquiera de estos elementos es un generador de H, es decir, el conjunto de generadores de H como grupo cíclico es

$$\{4+\mathbb{Z}_{60}, 8+\mathbb{Z}_{60}, 16+\mathbb{Z}_{60}, 28+\mathbb{Z}_{60}, 32+\mathbb{Z}_{60}, 44+\mathbb{Z}_{60}, 48+\mathbb{Z}_{60}\}.$$

Ejercicio 4.- Sea $H = \langle (1234), (13)\rangle \subset S_4$. Se pide:

1. Describir H y sus subgrupos.
2. Sean H_1, H_2 y H_3 los tres subgrupos de orden 4 de H. ¿Son isomorfos entre sí?
3. ¿Es H un subgrupo normal de S_4? ¿Son los subgrupos $H_i \cap A_4$, $i = 1, 2, 3$, normales en A_4?
4. Sea el subgrupo $K = \langle (12345678), (13)(48)(57)\rangle$ de S_8. ¿Es resoluble?

Indicación.- Los grupos de este ejercicio están relacionados con grupos diédricos.

Solución.-

1. Sean $\sigma = (1234)$ y $\tau = (13)$, se comprueba fácilmente que $\sigma^4 = \tau^2 = 1$ y $\sigma\tau = \tau\sigma^3$. Luego H es el grupo diédrico de orden 8, pongamos $H = D_8$.

   Podemos describir con detalle los elementos de H:

$$H = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\} =$$
$$= \{1, (1234), (13)(24), (1432), (13), (14)(23), (24), (12)(34)\}.$$

   Como H tiene orden 8, sus subgrupos no triviales tienen orden 2 o 4. Los subgrupos de orden 4 pueden ser cíclicos o generados por dos elementos de orden 2. El único subgrupo de H cíclico de orden 4 es

$$H_1 = \langle (1234)\rangle.$$

   Sólo hay dos subgrupos más de orden 4:

$$H_2 = \{1, (13), (24), (13)(24)\} \text{ y}$$
$$H_3 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

   Los subgrupos de orden 2 son los generados por elementos del mismo orden:

$$H_4 = \langle (13)(24)\rangle,$$
$$H_5 = \langle (13)\rangle,$$
$$H_6 = \langle (14)(23)\rangle,$$
$$H_7 = \langle (24)\rangle,$$
$$H_8 = \langle (12)(34)\rangle.$$

2. Es evidente que H_1 no es isomorfo a H_2 ni H_3, pues en el primero hay dos elementos de orden 4 y en los otros subgrupos no hay elementos de este orden.

   Para comprobar que H_2 y H_3 son isomorfos, basta dar cualquier aplicación biyectiva entre ambos conjuntos que lleve 1 en 1. es fácil ver que esta aplicación es isomorfismo de grupos.

3. Se comprueba fácilmente que H no es un subgrupo normal de S_4: consideremos las permutaciones $\alpha = (12) \in S_4$ y $\sigma = (1234) \in H$, entonces

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = (12)(1234)(12) = (1342) \notin H.$$

   Luego $H \ntriangleleft S_4$.

   Igualmente se comprueba que H_1 no es normal en A_4: si $\beta = (123) \in A_4$ y $\sigma = (1234) \in H_1$, se tiene

$$\beta\sigma\beta^{-1} = (123)(1234)(132) = (1423) \notin H_1.$$

   De donde $H_1 \ntriangleleft A_4$.

   Lo mismo ocurre con H_2: sean ahora $\gamma = (123) \in A_4$ y $\omega = (13)(24) \in H_2$, entonces

$$\gamma\omega\gamma^{-1} = (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \notin H_2.$$

   Por tanto $H_2 \ntriangleleft A_4$.

   Finalmente se comprueba que para todo $\delta \in A_4$ se tiene que

$$\delta H_3 = H_3\delta.$$

   Luego $H_3 \triangleleft A_4$.

4. Sean $\sigma = (12345678)$ y $\tau = (13)(48)(57)$, es fácil comprobar que $\sigma^8 = \tau^2 = 1$ y que $\sigma\tau = \tau\sigma^7$, luego

$$K = \{1, \tau, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6, \sigma^7, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4, \tau\sigma^5, \tau\sigma^6, \tau\sigma^7\}.$$

   As $|K| = 16$ y $K = D_{16}$ (grupo diédrico de orden 16).

   Sea el subgrupo $K_1 = \langle\sigma\rangle \subset K$. Es evidente que K_1 es abeliano, por ser cíclico, y que $K_1 \triangleleft K$, porque el orden de K_1 es la mitad del de K. Así

$$1 \triangleleft K_1 \triangleleft K$$

   es una cadena que hace resoluble al grupo K.