ÁLGEBRA | **Teoría de Grupos** | **31-3-2006**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- Sean m y n dos enteros no nulos. Demostrar que son equivalentes los siguientes enunciados:

1. Existe un homomorfismo de grupos no nulo de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.
2. Los enteros m y n no son primos entre sí.

Indicación.- Compruébese que cualquier tal homomorfismo viene determinado por la imagen de $1+\mathbb{Z}_m$ y que, por tanto, equivale a multiplicar por un entero.

Ejercicio 2.- Sea $f\colon \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$ la aplicación definida por $f(a+\mathbb{Z}_{12}) = a+\mathbb{Z}_4$. Se pide:

1. Probar que f es un homomorfismo de grupos. Hallar el núcleo y la imagen de f.
2. Exponer los posibles homomorfismos de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_4$.

Ejercicio 3.- Sean los grupos $\mathbb{Z}_{20}+\mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_{10}\cap\mathbb{Z}_{12}$. Se pide:

1. Comprobar que $\mathbb{Z}_{10}\cap\mathbb{Z}_{12} \subset \mathbb{Z}_{20}+\mathbb{Z}_{12}$. Sea en adelante
$$H = \frac{\mathbb{Z}_{20}+\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{Z}_{10}\cap\mathbb{Z}_{12}}.$$
2. Calcular el orden de H. Hallar todos los subgrupos de H indicando cuáles son normales.
3. ¿Es H un grupo cíclico? En caso afirmativo hallar razonadamente todos sus generadores, es decir, todos los $\overline{a}$ tales que $H = \langle\overline{a}\rangle$.

Ejercicio 4.- Sea $H = \langle(1234),(13)\rangle \subset S_4$. Se pide:

1. Describir H y sus subgrupos.
2. Sean H_1, H_2 y H_3 los tres subgrupos de orden 4 de H. ¿Son isomorfos entre sí?
3. ¿Es H un subgrupo normal de S_4? ¿Son los subgrupos $H_i\cap A_4$, $i=1,2,3$, normales en A_4?
4. Sea el subgrupo $K = \langle(12345678),(13)(48)(57)\rangle$ de S_8. ¿Es resoluble?