

Apellidos

Nombre

**Ejercicio 1.** (4 puntos) (A) Sea  $H$  el subgrupo de  $S_4$  generado por  $\sigma = (1234), \tau = (12)(34)$ . Sea  $K$  el subgrupo de  $H$  generado por  $\sigma$ . Se pide:

1. Probar que  $K$  es un subgrupo normal de  $H$ . ¿Cuántos elementos tienen  $K$  y  $H/K$ ?
2. Dar una presentación del grupo  $H$  correspondiente a los generadores  $\sigma$  y  $\tau$ .

(B) Sea  $G$  un grupo y  $L$  un subgrupo normal de  $G$ . Si  $L$  y  $G/L$  son abelianos, ¿podemos concluir que  $G$  es abeliano?

**Ejercicio 2.** (3 puntos)

1. Justificad si los enteros algebraicos de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$  son los elementos de  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ .
2. Deducid si 2 es irreducible en  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ .
3. Deducid si 2 es primo en  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  observando que  $6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ .
4. Justificad si  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  es un dominio euclídeo.

**Ejercicio 3.** (3 puntos) Sea  $\beta \in \mathbf{C}$  una raíz del polinomio  $F(X) = X^3 - 3X + 1$  y  $K = \mathbf{Q}(\beta)$ .

1. Calculad el grado de la extensión  $[K : \mathbf{Q}]$ .
2. Sea  $m : K \rightarrow K$  la aplicación  $\mathbf{Q}$ -lineal definida por  $m(c) = (1 + \beta^2)c$  para cada  $c \in K$ . Calculad la matriz de  $m$  respecto de alguna  $\mathbf{Q}$ -base de  $K$ , así como su polinomio característico.