Álgebra (A) Examen de Junio (11-06-04)

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1. *(*1,5 *puntos).*

1. Definición de grupo cíclico.
2. Ponga un ejemplo de un subgrupo de orden 6 que sea cíclico y otro que no lo sea, dentro de un grupo de permutaciones.
3. Responda verdadero o falso:
   a) Todo grupo cíclico es abeliano.
   b) Todo grupo abeliano es cíclico.

Ejercicio 2. *(*2,5 *puntos).* En el grupo de permutaciones S_9 se consideran los elementos siguientes:

$$\sigma = (1\ 8\ 3\ 4\ 2\ 6\ 7\ 5\ 9) \qquad \text{y} \qquad \tau = (1\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2).$$

1. Halle el orden de $\tau\sigma$. Compruebe si $\tau^3\sigma^3 = 1$.
2. Verifique si $\tau\sigma = \sigma\tau^4$.
3. Verifique si $\tau^i\sigma = \sigma\tau^{4i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.
4. Demuestre que $\sigma\tau^j\sigma\tau^i\sigma \in \langle\tau\rangle$, para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. *(*2,5 *puntos).* Sea $f(X) = X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

1. Pruebe que $f(X)$ es irreducible en $\mathbb{F}_5[X]$.
2. Sea α una raíz de $f(X)$. Pruebe que $\gamma = 2\alpha^2 + \alpha + 1$ verifica que $\gamma^2 = 2 + 2\alpha^2$.
3. Pruebe que un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{F}_5$ es $K = \mathbb{F}_5[\alpha]$. ¿Cuántos elementos tiene K?
4. Pruebe que para cada $v \in K$ existe un único $u \in K$ tal que $v = u^5$. Calcule tal elemento para $v = \alpha$.
5. Sea $\sigma : K \to K$ definida por $\sigma(z) = z^5$. Pruebe que $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|\mathbb{F}_5)$.
6. ¿Existen cuerpos intermedios entre $\mathbb{F}_5$ y K?

Ejercicio 4. *(*3,5 *puntos).* Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva octava de la unidad, y $f(X) = X^8 - 1$.

1. Pruebe que un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ es $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.
2. Calcule el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$, y deduzca que $[K : \mathbb{Q}] = 4$.
3. Sea σ un automorfismo de $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$. Pruebe que $\sigma(\alpha) \in \{\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7\}$. Si numeramos las raíces primitivas octavas de la unidad, concluya que $G \simeq \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
4. Determine los cuerpos intermedios k, $\mathbb{Q} \subset k \subset K$, a partir de los subgrupos de G.