Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.) *Valor 3 puntos.*
Sean las matrices complejas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y el grupo $G = \langle A, B \rangle \subset GL(2, \mathbb{C})$.

(1) Calcule los grupos $H_1 = \langle A \rangle$ y $H_2 = \langle B \rangle$ y compruebe que $A^2 = B^2$, $AB = BA^3$.

(2) Demuestre que
$$G = \left\{ I, A, A^2, A^3, B, BA, BA^2, BA^3 \right\}.$$

(3) Halle los órdenes de los elementos de G. Deduzca todos los subgrupos de G, indicando los que son cíclicos.

(4) Deduzca si G es un grupo resoluble.

(5) Determine los elementos de orden 4 de S_4. Deduzca que G no es isomorfo a ningún subgrupo de S_4.

Ejercicio 2.) *Valor 3 puntos.* Sean $f_1(X) = X^4 - 2, f_2(X) = X^4 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$, y K_1 y K_2 cuerpos de descomposición de los polinomios f_1 y f_2 respectivamente sobre $\mathbb{Q}$.

(1) Halle los grados de las extensiones $[K_1 : \mathbb{Q}]$, $[K_2 : \mathbb{Q}]$ y $[K_1 : K_2]$.

(2) Calcule un elemento primitivo de K_1 sobre $\mathbb{Q}$.

(3) Pruebe que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el elemento $a\sqrt{2} + bi$ es un elemento primitivo de K_2 sobre $\mathbb{Q}$.

(4) Halle razonadamente un elemento primitivo de K_1 sobre K_2.

Ejercicio 3.) *Valor 3 puntos*
Sea $f(X) = X^{11} - 1$ y $\alpha = e^{2\pi i/11}$.

(1) Pruebe que el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}[\alpha]$.

(2) Calcule $[K : \mathbb{Q}]$.

(3) Sea $\theta : K \to K$ definida por $\theta(y) = y^2$. Pruebe que $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) = \langle \theta \rangle$.

(4) Demuestre que existe un único cuerpo F tal que $[F : \mathbb{Q}] = 5$. Si $\beta = \alpha^9 + \alpha^2$, deduzca que $F = \mathbb{Q}[\beta]$

Ejercicio 4.) *Valor 1 punto.*
Sea K un cuerpo finito. Pruebe que si L es una extensión simple finita de K entonces es un cuerpo finito. Deduzca el número de elementos de L en función del número de elementos de K y de $[L : K]$.