Álgebra Examen de Junio (17-06-2005)

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1. *(2 puntos)* Sean $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Halle el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$.
2. Compruebe que $\beta = \frac{\alpha^2-2}{\alpha}$. Exprese β como polinomio en α con coeficientes racionales.
3. Razone si $\sigma(\alpha) = \beta$ define un automorfismo $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$. Demuestre que, en ese caso, $\sigma(\beta) = -\alpha$.
4. Razone si $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$.
5. Una extensión de cuerpos $F \subset L$ es radical si existen cuerpos

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = L$$

donde para $i = 1, \ldots, n$ existe $\gamma_i \in F_i$ con $F_i = F_{i-1}(\gamma_i), \gamma_i^{m_i} \in F_{i-1}$ para algún $m_i > 0$. Pruebe que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ es una extensión radical.

Ejercicio 2. *(1,5 puntos)* Consideremos los grupos multiplicativos $G = \langle(1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4)\rangle \subset S_4$ y $G' = \{1, -1\}$.

1. Halle todos los elementos de G.
2. Exhiba un subgrupo propio de G que sea cíclico y otro que no los sea.
3. Sea $\epsilon : G \to G'$ el homomorfismo inducido por la paridad, es decir, si $\sigma \in G$ es par entonces $\epsilon(\sigma) = 1$, y si $\sigma \in G$ es impar entonces $\epsilon(\sigma) = -1$. Calcule $\ker(\epsilon)$.
4. Halle un homomorfismo $\delta : G' \to G$ tal que $\epsilon \circ \delta = \mathrm{id}_{G'}$. ¿Cuántas posibles soluciones existen?

Ejercicio 3. (*1 punto*).

1. Definición de subgrupo normal.
2. Definición de extensión normal de un cuerpo.
3. Relación entre ambos conceptos.

Ejercicio 4. *(1,5 puntos)* Sea $f(X) = X^4 + X^2 + 1 \in k[X]$. Para $k = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_5$ calcule un elemento γ tal que el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre k sea $k(\gamma)$.

Ejercicio 5. *(4 puntos)*. Marque como verdadera o falsa cada una de las siguientes conclusiones.

- Sea $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Entonces
  1. $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ es cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$.
  2. $f(X)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.
  3. $f(X)$ es reducible en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$.
- Sea $\mathbb{F}_1$ un cuerpo finito y $\mathbb{F}_2$ una extensión finita de $\mathbb{F}_1$. Entonces $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_2|\mathbb{F}_1)$ es un grupo
  1. cíclico.
  2. simple.
  3. abeliano.
  4. resoluble.
- Sea $N = \{\sigma \in S_4 : \sigma(4) = 4\}$. Entonces
  1. N es un subgrupo de S_4 isomorfo a S_3.
  2. N es subgrupo normal de S_4.
  3. N es simple.
- El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Z}2, y \in \mathbb{Z}3\}$ es
  1. un subgrupo normal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
  2. un grupo abeliano.
  3. un anillo.
- Sea $H = \langle (1\ 2) \rangle$, y lo vemos como subgrupo de S_3 y S_4. Entonces
  1. H es normal como subgrupo de S_4.
  2. H es normal como subgrupo de S_3.
- Sea $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \subset S_4$. Entonces
  1. H es cíclico.
  2. H tiene 6 elementos.
  3. H es isomorfo a $C_2 \times C_2$.
- Todo grupo de orden 4 es
  1. resoluble.
  2. abeliano.
  3. normal en S_4 a través de la inmersión del teorema de Cayley.
- En S_4
  1. existe un subgrupo no resoluble.
  2. existe un grupo con 12 elementos.
  3. existe un grupo con 6 elementos.