ÁLGEBRA **Examen final de Junio (primera parte)** **29-06-2001**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1. (A) Definir el concepto "dominio euclídeo". Justificar (se pueden usar resultados de clase sin demostrarlos) si los siguientes conjuntos son dominios euclídeos: $k[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}6$.

(B) Sea $n \in \mathbf{Z}$, $q|n$. Probar que

$$(\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n) \,/\, (q + \mathbf{Z}n) \simeq \mathbf{Z}/\mathbf{Z}q.$$

Ejercicio 2. (A) Definir el concepto "entero algebraico". Estudiar si existen en $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ enteros algebraicos que no estén en $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.

(B) Sean α y β números algebraicos tales que

$$[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = m, \quad [\mathbf{Q}(\beta) : \mathbf{Q}] = n.$$

Probar que

$$[\mathbf{Q}(\alpha, \beta) : \mathbf{Q}(\alpha)] = n \iff [\mathbf{Q}(\alpha, \beta) : \mathbf{Q}(\beta)] = m.$$

Demostrar que la condición anterior siempre se tiene cuando $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$. Dar un ejemplo en el que se dé la condición, con m y n no primos entre sí.

TIEMPO: Una hora y 45 minutos.

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 3. (A) Enunciar y demostrar el Teorema de Lagrange.

(B) Demostrar que $S_4 \simeq G(T, R)$, con

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}\,, \quad R = \left\{t_i^2,\ (t_1 t_3)^2\,,\ (t_1 t_2)^3\,,\ (t_2 t_3)^3\right\}$$

(Idea: t_i corresponde a $(i \;\; i+1)$.)

TIEMPO: Una hora y media.