Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1. *(1 punto)* Se pide:

1. Descomponga en ciclos disjuntos la permutación:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_8.$$
2. ¿Existe algún $\tau \in S_8$ tal que $\tau\sigma\tau^{-1} = (1234)(56)(78)$? En caso afirmativo, calcule τ.

Ejercicio 2. *(3 puntos)* Sean $C_2 = \{1, x\}, C_3 = \{1, y, y^2\}$ grupos cíclicos de orden 2 y 3 respectivamente y sea $f : C_3 \to C_3$ la aplicación definida por $f(g) = g^2$ para cada $g \in C_3$. Se pide:

1. Pruebe que f es un automorfismo de C_3. Comprobar que f tiene orden 2 en tanto que elemento del grupo $\mathrm{Aut}(C_3)$ de los automorfismos de C_3.
2. Sea $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ el homomorfismo de grupos dado por $\varphi(x^i) = f^i$, $i = 0, 1$. Consideremos la siguiente operación interna en $C_3 \times C_2$:
$$(a, b) \star (c, d) := (a \cdot [\varphi(b)(c)], b \cdot d), \quad (a, b), (c, d) \in C_3 \times C_2.$$
Pruebe que $(C_3 \times C_2, \star)$ es un grupo.
3. Para el grupo anterior, defina un homomorfismo sobreyectivo $h : C_3 \times C_2 \to C_2$ y demuestre que su núcleo es un grupo cíclico de orden 3.

Ejercicio 3. *(1 punto)*

1. Sea G el grupo de Galois de una extensión normal (de Galois) $K|k$. Si $|G| = 6$ y es cíclico, razone cuántos cuerpos intermedios hay entre k y K.
2. Responda 'verdadera' o 'falsa' a las siguientes afirmaciones:
   (a) Hay cuerpos finitos con 64 elementos.
   (b) Hay cuerpos finitos con 36 elementos.
   (c) Dos cuerpos finitos con el mismo número de elementos son isomorfos.

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 4. *(3 puntos)* El anillo $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ tiene estructura de dominio euclídeo con la norma $\delta(m+n\sqrt{2}) = |m^2 - 2n^2|$. Sea $\varphi : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Z}/\mathbf{Z}14$ definida por $\varphi(a+b\sqrt{2}) = (a+4b)+\mathbf{Z}14$.

1. Pruebe que φ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo.
2. Sea $r \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ tal que $\delta(r) < 14$ y $\varphi(r) = 0 + \mathbf{Z}14$. Pruebe que $r = 0$.
3. Pruebe que $\ker\varphi = \langle 8+5\sqrt{2}\rangle$.
4. Razone si $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio de ideales principales. ¿Son primos los elementos $\sqrt{2}$ y $1-2\sqrt{2}$?
5. Se tiene que $8+5\sqrt{2} = \sqrt{2}(5+4\sqrt{2}) = (4+3\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})$. Explique por qué lo anterior no contradice la factorización única en $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

Ejercicio 5. *(2 puntos)* Sea $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

1. Halle $[K : \mathbf{Q}]$.
2. Sea $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Deduzca si $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
3. Demuestre que $K|\mathbf{Q}$ es una extensión normal (de Galois).
4. Describa los elementos del grupo de Galois $G(K|\mathbf{Q})$, en términos de las imágenes de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$.