ÁLGEBRA | **Convocatoria de Septiembre (primera parte)** | **16-09-2002**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1. *(3,5 puntos)*

1. ¿Hay algún elemento de orden 8 en S_6? ¿y de orden 60 en S_{12}?
2. Dados dos grupos G, G' y dos subgrupos normales $H \triangleleft G, H' \triangleleft G'$, pruebe que $H \times H'$ es un subgrupo normal de $G \times G'$ y que existe un isomorfismo natural
$$\frac{G \times G'}{H \times H'} \simeq \frac{G}{H} \times \frac{G'}{H'}.$$
3. ¿Puede ser finito el grupo de automorfismos de un grupo infinito?
4. Describa todos los automorfismos de $C_2 \times C_2$ indicando las imágenes de unos generadores. Pruebe que $S_3 \simeq \mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$ a través de la tabla del grupo.

Ejercicio 2. *(1 punto)*

1. Sea R un dominio, $a \in R$ un elemento irreducible y $b \in R$. Pruebe que
   (a) Si $b \in \langle a \rangle$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = a$.
   (b) Si $b \notin \langle a \rangle$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$.
2. Dé un ejemplo de un dominio R y un elemento $a \in R$ irreducible tal que $R/\langle a \rangle$ no sea dominio de integridad.

ÁLGEBRA | **Convocatoria de Septiembre (segunda parte)** | **16-09-2002**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 3. *(2,5 puntos)* Sea k un cuerpo y R el conjunto de polinomios de $k[X]$ que no tienen el término de grado 1, es decir, polinomios de la forma $a_0 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n$.

1. Pruebe que R es un subanillo de $k[X]$.
2. Pruebe que X^2 y X^3 son irreducibles en R, pero no son primos. ¿Es R un dominio euclídeo?
3. Sea A un DFU y F el cuerpo de fracciones de A. Pruebe que $d \in A$ es un cuadrado en A si y solamente si d es un cuadrado en F.
4. Dé un contraejemplo de lo anterior para el anillo R.

Ejercicio 4. *(3 puntos)* Sea K el cuerpo de descomposición de $X^3 - 2$ sobre $\mathbf{Q}$.

1. Demuestre que $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2})$.
2. Halle $[K : \mathbf{Q}]$.
3. Sea $\alpha = \sqrt{-3} + \sqrt[3]{2}$. Deduzca si $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
4. Describa los elementos del grupo de Galois $G(K|\mathbf{Q})$, simultáneamente,
   (a) en términos de las imágenes de $\sqrt{-3}$ y $\sqrt[3]{2}$,
   (b) en términos de las imágenes de las raíces de $X^3 - 2$.