ÁLGEBRA **Examen de septiembre** **3-9-2003**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1. (*2,5 puntos*) Sea $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$ el cuerpo finito con dos elementos. Sea α raíz de X^2+X+1 sobre $\mathbb{F}_2$ y $K_1 = \mathbb{F}_2[\alpha]$. Sea $g(X) = X^2 + \alpha X + 1 \in K_1[X]$.

1. ¿Cuántos elementos tiene K_1? Expréselos en función de α.
2. Pruebe que $g(X)$ es irreducible sobre $K_1[X]$.
3. Sea β raíz de $g(X)$ y $K_2 = K_1[\beta]$. ¿Cuántos elementos tiene K_2? Calcule $[K_2 : \mathbb{F}_2]$.
4. Sea $\varphi : K_2 \to K_2$ definida por $\varphi(x) = x^2$. Pruebe que $\varphi \in \mathrm{Gal}(K_2|\mathbb{F}_2)$, y que el orden de φ es 4. Deduzca que $\mathrm{Gal}(K_2|\mathbb{F}_2) = \langle\varphi\rangle$.

Ejercicio 2. (*3 puntos*) Sea $f(X) = X^8 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ y α una raíz octava primitiva de la unidad, por ejemplo $\alpha = \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{2}$. Sea K un cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$ y G el grupo de Galois de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$.

1. Demuestre que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.
2. Halle $[K : \mathbb{Q}]$.
3. Sea $\sigma \in G$. Pruebe que $\sigma(\alpha) = \alpha^k$ si y solamente si k es impar. Verifique si $\sigma^2 = id$.
4. Si llamamos $x_k = \alpha^k, k = 1, \ldots, 8$ a las raíces de $f(X)$, exprese G como subgrupo de S_8.
5. Halle todos los subgrupos de G.
6. Razone cuáles de los siguientes cuerpos son intermedios entre $\mathbb{Q}$ y K y justifique si hay alguno más:

$$\text{(a) } \mathbb{Q}[i], \quad \text{(b) } \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \quad \text{(c) } \mathbb{Q}[\sqrt{-2}], \quad \text{(d) } \mathbb{Q}[\alpha^2], \text{(e) } \mathbb{Q}[\alpha+\alpha^2], \quad \text{(f) } \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

Ejercicio 3. (*1 punto*) Sea G un grupo finito de orden impar y $x \in G$. Demuestre que existe $y \in G$ tal que $x = y^2$.

Ejercicio 4. (*1 punto*) Sea H un subgrupo normal de orden dos de un grupo G. Pruebe que $H \subset C(G)$.

Ejercicio 5. (*1 punto*) Consideremos en S_7 la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma, \sigma^2, \sigma^{-1}$. Calcule el orden de $\sigma, \sigma^2, \sigma^{-1}$.

Cuestión 1. (*1,5 puntos*).

1. Definición de subgrupo normal.
2. Definición de extensión normal de un cuerpo.
3. Relación entre ambos conceptos.