Apellidos **Nombre**

Cuestión 1. (*1 punto*) Defina y caracterice las extensiones normales de cuerpos.

Cuestión 2. (*1 punto*) Pruebe que A_n es un subgrupo de S_n normal.

Ejercicio 1. (*3,5 puntos*) Se sabe que $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^5-1}{X-1}$ es un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Sean $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ y G_f el grupo de Galois de f sobre $\mathbb{Q}$.

1. Deduzca que $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ son todas las raíces de f. Averigüe si K es un cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$.
2. Calcule $|G_f|$.
3. Si $\sigma_j \in G_f$ viene dado por $\sigma_j(\alpha) = \alpha^j$, con $j = 1, 2, 3, 4$, deduzca si $G_f = \langle\sigma_j\rangle$ para algún valor de j.
4. Numerando las raíces de f por $x_j = \alpha^j$, con $j = 1, 2, 3, 4$, identifique G_f con un subgrupo de S_4. Razone si la conjugación en $\mathbb{C}$ define algún elemento de G_f.
5. Halle todos los subgrupos de G_f.
6. Halle todos los cuerpos intermedios entre $\mathbb{Q}$ y K. Deduzca si $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{5})$ y $\mathbb{Q}(\cos\frac{\pi}{5})$ son algunos de estos cuerpos. Halle un valor $d \in \mathbb{Z}$, si existe, tal que $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Ejercicio 2. (*2 puntos*) Sea k un cuerpo y K_1, K_2 extensiones finitas.

1. Si $\operatorname{car}(k) = 0$ y $[K_1 : k] = [K_2 : k]$, ¿son K_1 y K_2 isomorfos como cuerpos? Justifique la respuesta. Indicación: considere, por ejemplo, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
2. Si k es finito y $[K_1 : k] = [K_2 : k]$, ¿son K_1 y K_2 isomorfos como cuerpos? Justifique la respuesta.

Ejercicio 3. *(2,5 puntos)* Sea G un grupo y $f : G \to G$ un homomorfismo de grupos tal que $f \circ f = f$. Sean $H = \ker(f)$ y $K = \operatorname{im}(f)$. Pruebe que:

1. Para todo $x \in G$, $xf(x)^{-1} \in H$. Deduzca que $G = H \cdot K$.
2. $H \cap K = \{1\}$.
3. Si $K \triangleleft G$, entonces la aplicación $f : H \times K \to H \cdot K$ definida por $f(h, k) = hk$ es un isomorfismo de grupos.