SOLUCIONES

1.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando las respuestas:

1. Un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas puede ser compatible determinado.

   Verdadero. El sistema será compatible determinado si y sólo si la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 3, lo cual es posible puesto que la matriz de coeficientes es de tamaño 4×3 y la matriz ampliada es 4×4. Sólo necesitamos que una de las filas de la matriz ampliada dependa linealmente de las otras tres, y que estas tres sean linealmente independientes.

   Un ejemplo sencillo sería $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right.$

2. El sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array} \right\}$ tiene solución única.

   Falso. El determinante de la matriz de coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ luego el rango de esta matriz es menor que 3, que es el número de incógnitas. Por tanto, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema no puede tener solución única.

3. Si en una matriz 4×3 hay una fila que depende linealmente de las otras tres, entonces hay una columna que depende linealmente de las otras dos.

   Falso. Si la matriz tiene rango 3, habrá una fila que será linealmente dependiente de las otras tres, pero las tres columnas serán linealmente independientes.

4. El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = z\}$ es una variedad lineal de dimensión 1.

   Falso. Este conjunto viene dado por una ecuación implícita ($x - y - z = 0$), luego es una variedad lineal de $\mathbb{R}^3$ de dimensión $3 - 1 = 2$. Se trata de un plano.

5. El conjunto, $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 0, -1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

   Verdadero. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $1 \neq 0$. Por tanto, estos cuatro vectores generan una variedad lineal de dimensión 3, que tiene que ser necesariamente $\mathbb{R}^3$.

6. Si $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ es una base del espacio vectorial V, $\{\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}, \mathbf{u_1}+\mathbf{u_3}, \mathbf{u_2}+\mathbf{u_3}\}$ es una base del mismo espacio vectorial.

   Verdadero. Las coordenadas de los vectores del segundo conjunto respecto de la base inicial son: $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Como V tiene dimensión 3 (al tener una base formada por tres elementos), este sistema será base si y sólo si es libre, lo cual se demuestra viendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

7. Si L_1 es la variedad lineal en $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones implícitas $y - z = 0$ y $L_2 = L((0,0,1),(0,0,-1))$, se verifica que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de L_1 y L_2.

   Verdadero. La variedad lineal L_1 viene dada por una sola ecuación implícita, luego $\dim(L_1) = 2$. Por otra parte, una base de L_2 es $\{(0,0,1)\}$ (puesto que el vector $(0,0,-1)$ depende linealmente de éste), luego $\dim(L_2) = 1$. Además, como el vector $(0,0,1)$ no satisface la ecuación implícita de L_1, se tiene que $L_1 + L_2$ es estrictamente mayor que L_1, luego $\dim(L_1 + L_2) = 3$, es decir $\boxed{L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3}$. Por último, por la fórmula de la dimensión $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 1 - 3 = 0$, por tanto $\boxed{L_1 \cap L_2 = \{0\}}$.

8. Si $L = L((1,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0))$, entonces $\dim(\mathbb{R}^6/L) = 3$.

   Falso. Como L está generado por dos vectores linealmente independientes, $\dim(L) = 2$, luego $\dim(\mathbb{R}^6/L) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\mathbb{L}) = 6 - 2 = 4 \neq 3$.

2.- Demostrar la siguiente proposición:
Los vectores $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos depende linealmente de los demás.

Demostración: Supongamos que los vectores $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ son linealmente dependientes. Entonces existirán unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, <u>no todos nulos</u>, tales que $\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \alpha_3\mathbf{u_3} = 0$. Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. En ese caso, podemos dividir la igualdad por α_1, y obtendremos $\mathbf{u_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{u_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\mathbf{u_3} = 0$, por tanto $\mathbf{u_1} = (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1})\mathbf{u_2} + (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1})\mathbf{u_3}$. Luego en este caso, $\mathbf{u_1}$ depende linealmente de los otros dos. Los casos $\alpha_2 \neq 0$ y $\alpha_3 \neq 0$ son análogos.

Supongamos ahora que uno de los vectores, digamos $\mathbf{u_1}$ depende linealmente de los otros dos. Esto quiere decir que existen escalares α_2, α_3 tales que $\mathbf{u_1} = \alpha_2\mathbf{u_2} + \alpha_3\mathbf{u_3}$. Pero entonces $\mathbf{u_1} - \alpha_2\mathbf{u_2} - \alpha_3\mathbf{u_3} = 0$, y el coeficiente de $\mathbf{u_1}$ es distinto de cero, luego en este caso los tres vectores son linealmente dependientes. Los casos en que $\mathbf{u_2}$ o $\mathbf{u_3}$ dependen linealmente de los otros dos son análogos.