Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1) *Valor 3 puntos*

En $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ consideremos el punto $P = (1\colon 1\colon 1\colon 1)$ y los planos $H_i = \{x_i = 0\}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Una recta r que pase por P, corta a cada H_i en un cierto P_i.

Consideremos el lugar geométrico Q de los puntos de las rectas r tales que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$. Se trata de demostrar que Q es un cono de vértice P. Para ello,

1. Calcule las ecuaciones de la recta r que pasa por P y por un punto genérico $P_0 = (0\colon \alpha\colon \beta\colon \gamma)$ de H_0. Obtenga los puntos de corte $P_i = r \cap H_i$ para $i = 1, 2, 3$.
2. Sea $\mathcal{R} = \{P, P_0; U\}$ un sistema de referencia en r. Calcule las coordenadas de los puntos P_i respecto de $\mathcal{R}$, para $i = 0, 1, 2, 3$.
3. Calcule la ecuación que debe verificar un punto $P_0 \in H_0$ para que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$, obteniendo una cónica en H_0.
4. Calcule Q, que es la proyección desde P de la cónica anterior.

Ejercicio 2) *Valor 3 puntos*

1. Calcule la ecuación de las cónicas afines osculatrices (tipo 4) con la parábola $y^2 = 2x$ en su punto del infinito y que pasan por el punto $(0, 0)$.
2. Calcule los ejes de cada una de ellas.
3. El lugar geométrico de los focos de las cónicas anteriores no degeneradas describe una cónica. Calcule su ecuación y clasifíquela.

Ejercicio 3) *Valor 4 puntos*

1. *(Valor 1 punto)* Enunciar las propiedades de las rectas contenidas en el lugar de una cuádrica de puntos hiperbólicos de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
2. *(Valor 3 puntos)* Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $y - xz = 0$. Se pide:
   (a) Clasificarla y hallar sus centros, planos principales y ejes.
   (b) Obtener las ecuaciones de todas y cada una de las rectas contenidas en su lugar. En concreto, hallar todas las que pasan por los puntos $P_1 = (0, 0, 2)$, $P_3 = (1, 0, 0)$ y $P_5 = (2, 2, 1)$, obteniéndose con ellas un hexalátero $E = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, contenido en el lugar de Q, cuyos vértices impares son los ya dados.
   (c) Comprobar que el hexalátero E verifica una generalización del teorema de Brianchon: las rectas que unen vértices opuestos son concurrentes o paralelas.

$\boxed{\text{A}}$

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1) *Valor 3 puntos*

En $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ consideremos el punto $P = (1\colon 1\colon 1\colon 1)$ y los planos $H_i = \{x_i = 0\}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Una recta r que pase por P, corta a cada H_i en un cierto P_i.

Consideremos el lugar geométrico Q de los puntos de las rectas r tales que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$. Se trata de demostrar que Q es un cono de vértice P. Para ello,

1. Calcule las ecuaciones de la recta r que pasa por P y por un punto genérico $P_0 = (0\colon \alpha\colon \beta\colon \gamma)$ de H_0. Obtenga los puntos de corte $P_i = r \cap H_i$ para $i = 1, 2, 3$.
2. Sea $\mathcal{R} = \{P, P_0; U\}$ un sistema de referencia en r. Calcule las coordenadas de los puntos P_i respecto de $\mathcal{R}$, para $i = 0, 1, 2, 3$.
3. Calcule la ecuación que debe verificar un punto $P_0 \in H_0$ para que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$, obteniendo una cónica en H_0.
4. Calcule Q, que es la proyección desde P de la cónica anterior.

Ejercicio 2) *Valor 3 puntos*

1. Calcule la ecuación de las cónicas afines osculatrices (tipo 4) con la parábola $x^2 = 2y$ en su punto del infinito y que pasan por el punto $(0, 0)$.
2. Calcule los ejes de cada una de ellas.
3. El lugar geométrico de los focos de las cónicas anteriores no degeneradas describe una cónica. Calcule su ecuación y clasifíquela.

Ejercicio 3) *Valor 4 puntos*

1. *(Valor 1 punto)* Enunciar las propiedades de las rectas contenidas en el lugar de una cuádrica de puntos hiperbólicos de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
2. *(Valor 3 puntos)* Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x - yz = 0$. Se pide:
   (a) Clasificarla y hallar sus centros, planos principales y ejes.
   (b) Obtener las ecuaciones de todas y cada una de las rectas contenidas en su lugar. En concreto, hallar todas las que pasan por los puntos $P_1 = (0, 0, 2)$, $P_3 = (0, 1, 0)$ y $P_5 = (2, 2, 1)$, obteniéndose con ellas un hexalátero $E = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, contenido en el lugar de Q, cuyos vértices impares son los ya dados.
   (c) Comprobar que el hexalátero E verifica una generalización del teorema de Brianchon: las rectas que unen vértices opuestos son concurrentes o paralelas.

B

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1) *Valor 3 puntos*

En $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ consideremos el punto $P = (1\colon 1\colon 1\colon 1)$ y los planos $H_i = \{x_i = 0\}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Una recta r que pase por P, corta a cada H_i en un cierto P_i.

Consideremos el lugar geométrico Q de los puntos de las rectas r tales que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$. Se trata de demostrar que Q es un cono de vértice P. Para ello,

1. Calcule las ecuaciones de la recta r que pasa por P y por un punto genérico $P_0 = (0\colon \alpha\colon \beta\colon \gamma)$ de H_0. Obtenga los puntos de corte $P_i = r \cap H_i$ para $i = 1, 2, 3$.
2. Sea $\mathcal{R} = \{P, P_0; U\}$ un sistema de referencia en r. Calcule las coordenadas de los puntos P_i respecto de $\mathcal{R}$, para $i = 0, 1, 2, 3$.
3. Calcule la ecuación que debe verificar un punto $P_0 \in H_0$ para que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$, obteniendo una cónica en H_0.
4. Calcule Q, que es la proyección desde P de la cónica anterior.

Ejercicio 2) *Valor 3 puntos*

1. Calcule la ecuación de las cónicas afines osculatrices (tipo 4) con la parábola $y^2 = 2x$ en su punto del infinito y que pasan por el punto $(0, 0)$.
2. Calcule los ejes de cada una de ellas.
3. El lugar geométrico de los focos de las cónicas anteriores no degeneradas describe una cónica. Calcule su ecuación y clasifíquela.

Ejercicio 3) *Valor 4 puntos*

1. *(Valor 1 punto)* Enunciar las propiedades de las rectas contenidas en el lugar de una cuádrica de puntos hiperbólicos de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
2. *(Valor 3 puntos)* Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z - xy = 0$. Se pide:
   (a) Clasificarla y hallar sus centros, planos principales y ejes.
   (b) Obtener las ecuaciones de todas y cada una de las rectas contenidas en su lugar. En concreto, hallar todas las que pasan por los puntos $P_1 = (0, 2, 0)$, $P_3 = (1, 0, 0)$ y $P_5 = (2, 1, 2)$, obteniéndose con ellas un hexalátero $E = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, contenido en el lugar de Q, cuyos vértices impares son los ya dados.
   (c) Comprobar que el hexalátero E verifica una generalización del teorema de Brianchon: las rectas que unen vértices opuestos son concurrentes o paralelas.

C

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1) *Valor 3 puntos*

En $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ consideremos el punto $P = (1\colon 1\colon 1\colon 1)$ y los planos $H_i = \{x_i = 0\}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Una recta r que pase por P, corta a cada H_i en un cierto P_i.

Consideremos el lugar geométrico Q de los puntos de las rectas r tales que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$. Se trata de demostrar que Q es un cono de vértice P. Para ello,

1. Calcule las ecuaciones de la recta r que pasa por P y por un punto genérico $P_0 = (0\colon \alpha\colon \beta\colon \gamma)$ de H_0. Obtenga los puntos de corte $P_i = r \cap H_i$ para $i = 1, 2, 3$.
2. Sea $\mathcal{R} = \{P, P_0; U\}$ un sistema de referencia en r. Calcule las coordenadas de los puntos P_i respecto de $\mathcal{R}$, para $i = 0, 1, 2, 3$.
3. Calcule la ecuación que debe verificar un punto $P_0 \in H_0$ para que $|P_0P_1P_2P_3| = -1$, obteniendo una cónica en H_0.
4. Calcule Q, que es la proyección desde P de la cónica anterior.

Ejercicio 2) *Valor 3 puntos*

1. Calcule la ecuación de las cónicas afines osculatrices (tipo 4) con la parábola $x^2 = 2y$ en su punto del infinito y que pasan por el punto $(0, 0)$.
2. Calcule los ejes de cada una de ellas.
3. El lugar geométrico de los focos de las cónicas anteriores no degeneradas describe una cónica. Calcule su ecuación y clasifíquela.

Ejercicio 3) *Valor 4 puntos*

1. *(Valor 1 punto)* Enunciar las propiedades de las rectas contenidas en el lugar de una cuádrica de puntos hiperbólicos de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
2. *(Valor 3 puntos)* Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z - xy = 0$. Se pide:
   (a) Clasificarla y hallar sus centros, planos principales y ejes.
   (b) Obtener las ecuaciones de todas y cada una de las rectas contenidas en su lugar. En concreto, hallar todas las que pasan por los puntos $P_1 = (2, 0, 0)$, $P_3 = (0, 1, 0)$ y $P_5 = (1, 2, 2)$, obteniéndose con ellas un hexalátero $E = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, contenido en el lugar de Q, cuyos vértices impares son los ya dados.
   (c) Comprobar que el hexalátero E verifica una generalización del teorema de Brianchon: las rectas que unen vértices opuestos son concurrentes o paralelas.

D