Ampliación de Geometría **Examen Diciembre** **25-11-03**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1) *Valor 3.5 puntos*

(1) Dar la definición de circunferencia y puntos cíclicos. Dar la definición de eje y vértice de una cónica.
(2) Calcular la ecuación general de la familia de circunferencias tangentes a la recta $y = 0$ en el origen.
(3) Calcular la ecuación del haz de cónicas superosculatrices a la parábola $x^2 - y = 0$ en su vértice.
(4) ¿Cuántas circunferencias del apartado 2 aparecen en el apartado 3? Concluir que la condición "ser superosculatriz" es una condición más restrictiva que "ser tangente".

Ejercicio 2) *Valor 3 puntos*
En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se dan las variedades

$$\pi_1 : x = 0, \quad \pi_2 : y = 0, \quad \pi_3 : z = 0, \quad r \begin{cases} 2 + y + 2z = 0 \\ 1 + x - z = 0 \end{cases}$$

(1) Usando la inmersión habitual φ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, halle los puntos $\varphi(\pi_1 \cap r)$, $\varphi(\pi_2 \cap r)$, $\varphi(\pi_3 \cap r)$, y r_∞. Calcule la razón doble de estos puntos, en ese orden.
(2) Enuncie una relación entre razón simple y razón doble y aplíquela para calcular la razón simple de $\pi_1 \cap r$, $\pi_2 \cap r$, $\pi_3 \cap r$, en ese orden.

Cuestión Defina el espacio dual $\mathbb{P}_n^*(k)$. Defina la aplicación $*$ del retículo de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}_n(k)$ en el de $\mathbb{P}_n^*(k)$ y enumere cuatro de sus propiedades.

Ejercicio 3) *Valor 3.5 puntos*
Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2x + y^2 + 2yz + z^2 = 0$.
(1) Clasifíquela.
(2) Calcule sus centros, planos principales y ejes, si los hay.
(3) Consideremos la cónica afín $Q_{|\pi}$, restricción de Q al plano $\pi : x + y = 0$. Clasificar esta cónica y calcular las coordenadas de su centro, focos y la ecuación de sus ejes (si los hubiera) respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$.