

Apellidos

Nombre

Ejercicio 1 Sea la familia \mathcal{F} de las cuádricas de \mathbb{R}^3 siguientes:

$$2y + x^2 + y^2 - z^2 + \alpha(x^2 - z^2 - 1) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

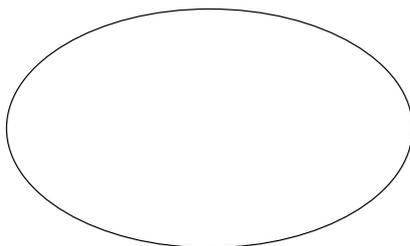
1. Clasifique todas las cuádricas de \mathcal{F} .
2. Calcule los centros y los planos principales de todas las cuádricas no degeneradas de \mathcal{F} . Obtenga las cuádricas de \mathcal{F} que son de revolución.
3. Demuestre que la intersección de los lugares de dos cuádricas cualesquiera de \mathcal{F} es el lugar de una cónica en un plano π . Dar una ecuación de π .

Ejercicio 2 Consideremos la recta r en \mathbb{R}^4 de ecuaciones $\{y + t = z = -x = 1\}$ y en ella los puntos $A = (-1, 0, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 1, 0)$ y $C = (-1, 2, 1, -1)$. Se pide:

1. Calcular la razón doble $|\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)r_\infty|$.
2. Sea el hiperplano $H : y = 0$, $P = (1 : 0 : 1 : 0 : 0)$ y consideremos la aplicación $f : \bar{r} \rightarrow \bar{H}$ definida por $f(R) = (R + P) \cap \bar{H}$. Calcular la razón doble $|f(\varphi(A))f(\varphi(C))f(\varphi(B))f(r_\infty)|$.
3. Si $|ABCD| = \mu$, determinar el valor de $|ACDB|$, $|DCBA|$ y $|DABC|$.

Ejercicio 3

1. Dada una cónica no degenerada como la de figura, dar un procedimiento geométrico para calcular la polar de P ; esto es, enunciar los resultados teóricos que permiten la construcción. No se admitirá como respuesta exclusivamente una descripción del dibujo.



2. Idem para r .
3. Consideremos el haz \mathcal{H} generado por la hipérbola $xy = 1$ y el par de rectas formado por los ejes de coordenadas. Demostrar que los polos de la recta $x - 1 = 0$ respecto de todas las cónicas de \mathcal{H} (excepto una) están contenidos en la recta $x = 0$.
4. Demostrar el apartado anterior en general; i.e., dado un haz de bitangentes \mathcal{H} y una recta r , los polos de r respecto de todas las cónicas del haz (excepto una) están contenidos en una recta.

Nota. para simplificar, se puede suponer que r está en posición general respecto de las rectas que aparecen en el haz.