

Apellidos

Nombre

**Ejercicio 1)** *Valor 1.5 puntos*

En el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  se dan tres rectas  $L_1, L_2, L_3$  tales que  $(L_i + L_j) \cap L_k = \emptyset$  para  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

- (1) Pruebe que  $n > 4$ , hallando la dimensión de la suma de las tres rectas.
- (2) En ese caso, pruebe que no existe ningún plano que contenga a una de las rectas y corte a las otras dos.

**Ejercicio 2)** *Valor 3 puntos*

- Defina foco de una cónica afín euclídea. Defina eje de una cónica afín euclídea. Discuta la existencia y el número de ellos en los casos hipérbola, parábola, elipse y circunferencia.
- Calcular la ecuación de TODAS las parábolas de foco  $(0, 0)$  y eje  $x + y = 0$ . De ellas, cuántas y cuáles pasan por el punto  $(1, 1)$ ? Calcular sus vértices.

**Ejercicio 3)** *Valor 5.5 puntos*

Sea  $Q$  la cuádrlica afín de  $\mathbb{R}^3$  de ecuación  $x - 2yz = 0$ .

- (1) Clasifíquela.
- (2) Calcule sus centros, planos principales y ejes, si los hay.
- (3) Calcule las direcciones asintóticas. Deduzca un haz de planos paralelos, tales que cada uno de ellos corta a  $\mathcal{V}(Q)$  en una única recta.
- (4) Sea  $\overline{Q}$  la cuádrlica proyectiva del espacio proyectivo  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  definida por  $Q$ , con la inmersión usual de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ . Compruebe que la familia  $\mathcal{F}$  de rectas  $\mathcal{F} = \{L_{\lambda\mu}\}_{(\lambda:\mu) \in \mathbb{P}_1}$  definidas por

$$L_{\lambda\mu} \begin{cases} \lambda x_0 = 2\mu x_2 \\ \mu x_1 = \lambda x_3 \end{cases}$$

son rectas contenidas en  $\mathcal{V}(\overline{Q})$ . Se define la razón doble de 4 rectas de  $\mathcal{F}$  como la razón doble de sus subíndices, i.e.

$$|L_{\lambda_1\mu_1} L_{\lambda_2\mu_2} L_{\lambda_3\mu_3} L_{\lambda_4\mu_4}| = |P_1 P_2 P_3 P_4| \quad \text{con} \quad P_i = (\lambda_i : \mu_i) \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

- (5) Sea  $r$  la recta de ecuaciones  $x_0 = x_2 = 0$  (una recta de la otra familia de  $\overline{Q}$ ). Pruebe que

$$|L_{\lambda_1\mu_1} L_{\lambda_2\mu_2} L_{\lambda_3\mu_3} L_{\lambda_4\mu_4}| = |Q_1 Q_2 Q_3 Q_4| \quad \text{con} \quad Q_i = L_{\lambda_i\mu_i} \cap r \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

- (6) Halle el cuarto armónico de las tres rectas siguientes

$$s_1 \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad s_2 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad s_3 \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$