

Apellidos

Nombre

**Ejercicio 1)** Valor 2.5 puntos

1. Sean  $A, B, C, D$  puntos de una recta proyectiva, compare razonadamente  $|BDC A|$  con  $|ABCD|$ .
2. Se dan dos puntos  $A, B$ . Si  $C$  es el punto del infinito de la recta  $AB$ , construya razonadamente, con escuadra y cartabón, el punto  $D$  tal que  $|BDC A| = 2$ .
3. Si  $A = (0, 0)$  y  $B = (2, 1)$  del plano afín real, halle las coordenadas del punto  $D$  del apartado anterior.

**Ejercicio 2)** Valor 2 puntos

Sea  $F : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  una homografía de ecuaciones  $X' = XA$ , en cierto sistema de referencia fijado  $\mathcal{R}$ . Se dice que una variedad lineal proyectiva  $L$  es doble para  $F$  si  $F(L) = L$ . Se pide:

1. Probar que un punto  $P$  es doble para  $F$  si y sólo si sus coordenadas  $(a_0 : a_1 : a_2)$  respecto de  $\mathcal{R}$  son las de un autovector fila de la matriz  $A$ , *i.e.* si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $(a_0, a_1, a_2)(\lambda I - A) = 0$ .
2. Probar que una recta  $L$  es doble para  $F$  si y sólo si los coeficientes  $(a_0, a_1, a_2)$  de la ecuación  $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$  de  $L$  respecto de  $\mathcal{R}$  definen un autovector fila de la matriz  $A^t$ .
3. Hallar todos los puntos y rectas dobles de la homografía  $F$  dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 3)** Valor 3.5 puntos

Dada la cuádrica afín  $Q$  en  $\mathbb{R}^3$  de ecuación  $y^2 + 2xz = 1$ , se pide:

1. Clasificarla.
2. Calcular su centro y su cono asintótico.
3. Calcular sus direcciones principales. ¿Es de revolución?. En caso afirmativo calcular su eje de revolución.
4. Calcular los focos reales de la cónica restricción de  $Q$  al plano  $y = 0$ .

**Ejercicio 4)** Valor 2 puntos

Calcular la(s) parábola(s) tangente(s) a  $r : x + y = 0$  en  $A = (1, -1)$  que pasa(n) por los puntos  $B = (0, 2)$  y  $C = (2, 0)$ .