Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1

- Si A, B, C, D y E son puntos distintos de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, probar que

$$|ABCD| = |ABCE| \cdot |ABED|.$$

- Se dan dos puntos distintos A, B del plano afín $\mathbb{R}^2$. Se desea construir el punto D tal que $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$, con escuadra y cartabón. Para ello,
  - Probar que $|ABCD| = 4$, si C es el punto del infinito de la recta AB.
  - Probar que $|ABCE| = 2$ si y sólo si E es el cuarto armónico de C, A, B.
  - Construir el punto D deseado, explicando **brevemente** la construcción.

Ejercicio 2 Sean r y r' dos rectas afines incidentes de $\mathbb{R}^2$.

- Demostrar que las cónicas afines que tienen a r y r' como asíntotas no se cortan dos a dos.
- Demostrar que toda cónica que tenga a r y r' como asíntotas no puede ser tangente a ninguna recta paralela a r o r'.
- Calcular los focos reales de las cónicas que tengan por asíntotas a $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, y pasen por el punto $(0, 1 - \sqrt{2})$.

Por si fuera necesario, se sabe que el polinomio $x_0^2 + 2x_2x_0 + 4x_1^2 + x_2^2$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$, y que $x_0^2 + 2x_0x_2 - 3x_2^2 = (x_0 + 3x_2)(x_0 - x_2)$.

Ejercicio 3

- Enumerar, razonadamente, las cuádricas proyectivas reales cuya sección por un plano π sea un par de rectas reales secantes.
- Si dicho plano π resulta ser el del infinito, ¿qué cuádrica afín se obtiene en cada caso?
- Sea la cuádrica afín Q de ecuación

$$x^2 - z^2 + 2x + 2y + 2z + 1 = 0.$$

  - Clasificar la cónica del infinito asociada.
  - Calcular el rango de $\bar{Q}$.
  - **Sin hacer cálculos**, clasificar Q.
  - Calcular el centro y los ejes de Q.
  - Calcular la ecuación del cono tangente a $\bar{Q}$ de vértice $P = (0 : 0 : 0 : 1)$.