AMPLIACION DE GEOMETRIA **31-1-00**

**Apellidos** **Nombre**

---

**Ejercicio 1**: VALOR: 3 PUNTOS
1). Hallar $n$ tal que dos variedades lineales cualesquiera $L_r$ y $L_s$ de $\mathbb{P}_n$, de dimensiones respectivas $r > 1$ y $s > 1$, se corten como mínimo en una recta. ¿Cuántos $n$ verifican esa condición?

En $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ se da el punto $P = (1 : 0 : 1 : 1 : 0)$, la variedad lineal $L_1$ engendrada por los puntos $(0 : 1 : 0 : 1 : 1), (1 : 1 : 1 : 0 : 0)$ y la variedad lineal $L_2$ engendrada por los puntos $(1 : 0 : 1 : 1 : 1), (0 : 0 : 0 : 1 : 1), (1 : 0 : 0 : 1 : 0)$

2). Usando la fórmula de la dimensión con $P + L_1$ y $P + L_2$ demostrar que existe una única recta $r$ que pasa por $P$ y se apoya sobre (i.e., corta a) $L_1$ y $L_2$.

3) Hallar los pies de $r$ sobre $L_1$ y $L_2$, es decir $r \cap L_1$ y $r \cap L_2$.

NOTA: Se suministran como datos las ecuaciones implícitas respectivas de $P+L_1$ y $P + L_2$, por si se considera conveniente utilizarlos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 0$$

**Ejercicio 2:** VALOR: 3 PUNTOS
A) En $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se da la homografía cuya matriz respecto del sistema de referencia canónico es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar los puntos y rectas dobles de esta homografía.

B) Consideremos la homología $F$ del plano proyectivo real de eje $e$, centro no incidente $O$ y razón $\frac{1}{2}$.

1. Sabiendo que si $|ABCD| = \mu$ entonces $|ACDB| = \frac{1}{1-\mu}$, diseñar razonadamente un procedimiento para construir el punto $F(A)$ para cualquier $A$ del plano.
2. En el dibujo adjunto, construir $F(A)$ utilizando dicho procedimiento. Construir también $F^2(A)$.

**Ejercicio 3:** VALOR: 2 PUNTOS En el espacio afín eucídeo $\mathbb{R}^3$ consideramos la cuádrica $\mathcal{Q}$ de ecuación

$$x^2 + 4y^2 - 10yz + 4z^2 - 1 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla.

2. Calcular su centro, sus direcciones principales, sus planos principales y sus ejes.

3. Calcular su cono asintótico (es decir, el cono tangente con vértice en el centro).

**Ejercicio 4:** VALOR: 2 PUNTOS Contestar brevemente a las siguientes cuestiones:

a) Enumerar los tipos de cuádricas proyectivas reales cuyos lugares contienen al menos una recta.

b) Enumerar los tipos de cuádricas proyectivas reales cuyos lugares contienen al menos dos rectas que se cruzan.

c) Enumerar los tipos de cuádricas afines reales cuyo lugar es vacío.

d) ¿Existen paraboloides elípticos de revolución? ¿Y paraboloides hiperbólicos de revolución? Contestar razonadamente.

e) Enumerar los tipos afines de cuádricas del espacio eucídeo tridimensional que pueden ser de revolución.

f) ¿Cuántos ejes tiene un cono afín real en el espacio euclídeo tridimensional que no sea de revolución? Contestar razonadamente.

A