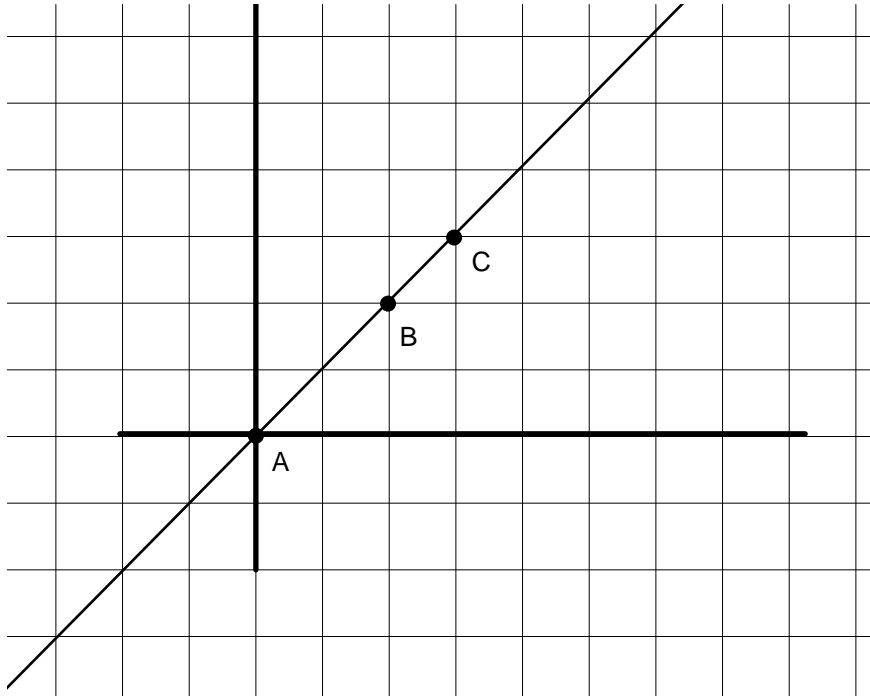


Ejercicio 1) *Valor ?? puntos*

Se dan los puntos $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ y $C = (3, 3)$ del plano afín \mathbb{R}^2 , que se considera sumergido en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ del modo usual. Sea r la recta afín AB .

1. En la clausura proyectiva $\bar{r} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A, B; C\}$; hallar las coordenadas respecto de \mathcal{R} de r_∞ , punto del infinito de r .
2. Construir geoméricamente el cuarto armónico D de los puntos A, B, C . Calcular las coordenadas de D como punto de \mathbb{R}^2 .
3. Sea $P = (x, x)$ un punto genérico de r y $P' = (y, y)$ el cuarto armónico de A, B, P (cuando esté definido). Demostrar que se verifica que $xy - x - y = 0$.
4. Clasificar la ecuación anterior en \mathbb{R}^2 . Hallar sus asíntotas, si las tiene.



Ejercicio 2) Valor ?? puntos

A.- Teniendo en cuenta que la tangente en el vértice a una cónica es perpendicular al eje al que pertenece, determinar la(s) parábola(s) de eje $2x + y = 0$ y vértice $(0, 0)$ que pasan por el punto $(-1, -3)$.

B.- Se considera la familia de cónicas afines de ecuación

$$Q_\alpha : 2\alpha x - x^2 + 2\alpha xy - y^2 = 0$$

Se pide:

- Clasificarlas.
- Hallar las direcciones principales y los ejes de Q_α en cada caso.
- Para el caso $\alpha = 1$, calcular los focos de la cónica obtenida.

Ejercicio 3) Valor ?? puntos

Se considera fijo el espacio proyectivo tridimensional real $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y, dentro de él, el espacio euclídeo de dimensión 3, sumergido de la forma usual respecto de un sistema de coordenadas. Responder a las cuestiones siguientes:

- Sea Q una cuádrica proyectiva no degenerada (es decir, de rango 4) y real (es decir, de signatura proyectiva 2 ó 0). ¿Se puede averiguar si Q es de puntos elípticos o hiperbólicos (es decir, signatura 2, ó 0 respectivamente) cortando por planos transversales (es decir, no tangentes) a Q ? En caso de respuesta afirmativa, decir cómo.
- En un paraboloides elíptico de revolución Q , ¿de qué tipo es la cónica del infinito Q_∞ de Q ? ¿Cuál de los puntos fundamentales del haz \mathcal{H} determinado por el absoluto Ω y Q_∞ es el de tangencia del plano del infinito?
- Dada la cuádrica Q de ecuación $x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_3 - x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - 2x_3x_1 = 0$, de la que se sabe que es no degenerada, demostrar que la recta r que pasa por los puntos $P_1 = (1 : 0 : 1 : 0)$, $P_2 = (1 : 0 : 0 : 1)$ está contenida en ella. ¿Cuál es la signatura proyectiva de esa cuádrica?
- Hallar el plano tangente L a la cuádrica Q en P_1 . La intersección $L \cap \mathcal{V}(Q)$ son dos rectas; hallar ecuaciones implícitas de cada una de ellas.
- Razonar por qué los planos tangentes a Q en los puntos de r forman el haz de planos \mathcal{P} de base r .