AMPLIACIÓN DE GEOMETRIA **Examen de septiembre** **1-9-2000**

Apellidos **Nombre**

EJERCICIO 1.– (VALOR: 2,5 PUNTOS)

1). Hallar el mínimo n tal que en $\mathbb{P}_n$ existan dos planos π y π' que no se corten.

En $\mathbb{P}_5(\mathbb{Q})$ se da el punto $P = (1 : -2 : 0 : -2 : 2 : 1)$, el plano π que pasa por los puntos $(2 : 0 : -1 : 1 : 0 : -2), (-3 : 1 : 1 : -3 : -3 : -2), (3 : -1 : -1 : -3 : 2 : 3)$ y el plano π' que pasa por los puntos $(-1 : -2 : 1 : -3 : 2 : 3), (-2 : -2 : 0 : 0 : 0 : -3), (-1 : 2 : 1 : 0 : 1 : -2)$

2). Demostrar que hay una única recta r que pase por P y corte a ambos planos.

3). Hallar los pies de r sobre π y π', es decir $r \cap \pi$ y $r \cap \pi'$.

NOTA: Se suministran como datos las ecuaciones implícitas respectivas de $P + \pi$ y $P + \pi'$, por si se considera conveniente utilizarlos.

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 13 & 1 & -5 & 1 \\ -4 & -6 & -11 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -36 & 21 & -92 & 0 & 34 & 10 \\ -12 & 0 & -19 & 21 & 23 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

EJERCICIO 2.– (VALOR: 3 PUNTOS)

1. Sean A, B, C, D, E puntos distintos alineados. Probar que $|ABCD| = |ABCE||ABED|$.
2. Sean F, G dos homologías de centro O, eje e, $O \notin e$, y razones λ, μ, respectivamente, con $\lambda\mu \neq 1$. Demostrar que el producto FG es otra homología de centro O, eje e y razón $\lambda\mu$. ¿Qué será FG si $\lambda\mu = 1$?
3. Sea F la homología dada por los datos de la figura posterior: el centro O, el eje e, A y $F(A)$. Utilizando una homología G de razón -1, construir $H(B)$, siendo H la homología de centro O, eje e y razón$(H) = -$razón(F).

EJERCICIO 3.– (VALOR: 2 PUNTOS)

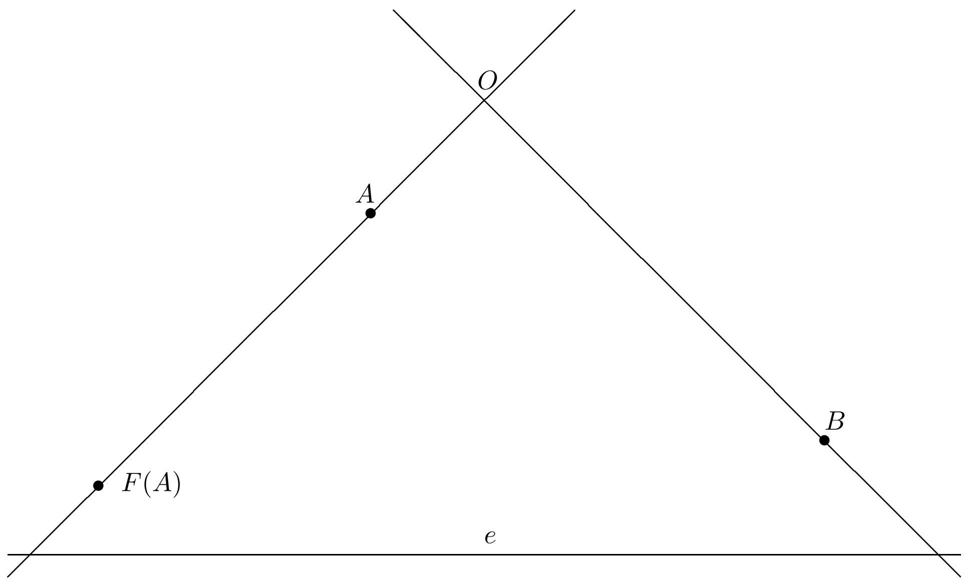
Sea la cónica afín Q de ecuación $x^2+2x+2y = 0$. Clasificarla. Sea $\overline{Q}$ la cónica proyectiva asociada y consideremos el cuadrivértice P_1, P_2, P_3, P_4, con $P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (1 : -2 : 0), P_3 = (1 : 2 : -4), P_4 = (0 : 0 : 1)$. Calcular los puntos diagonales de este cuadrivértice y comprobar que la polar del punto diagonal alineado con P_1 y P_2 es la recta que pasa por los otros dos puntos diagonales (digamos P, P').

EJERCICIO 4.– *(Valor: 2,5 puntos)* Consideremos la cuádrica afín Q de ecuación

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 6yz + 2 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla, hallar sus planos principales, ejes y sus vértices.
2. ¿Qué tipos de cónicas afines se pueden obtener al cortar la cuádrica Q por un plano? Dar la ecuación de algún plano afín L que corte a Q en un par de rectas imaginarias (secantes en un punto real).



O
A
B
F(A)
e

AMPLIACIÓN DE GEOMETRIA **Examen de septiembre** **1-9-2000**

Apellidos **Nombre**

EJERCICIO 1.– (VALOR: 2,5 PUNTOS)

1). Hallar el mínimo n tal que en $\mathbb{P}_n$ existan dos planos π y π' que no se corten.

En $\mathbb{P}_5(\mathbb{Q})$ se da el punto $P = (2 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1)$, el plano π que pasa por los puntos $(-1 : 2 : 1 : 0 : 1 : -2), (3 : -1 : -1 : -1 : 0 : -1), (-3 : 1 : -3 : 1 : -3 : 2)$ y el plano π' que pasa por los puntos $(3 : 3 : 3 : 3 : 1 : 3), (-1 : 0 : -1 : -1 : 2 : 0), (2 : 1 : 1 : -3 : -3 : 1)$

2). Demostrar que hay una única recta r que pase por P y cort3 a ambos planos.

3). Hallar los pies de r sobre π y π', es decir $r \cap \pi$ y $r \cap \pi'$.

NOTA: Se suministran como datos las ecuaciones implícitas respectivas de $P + \pi$ y $P + \pi'$, por si se considera conveniente utilizarlos.

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -59 & 22 & 84 & 16 \\ 1 & 2 & 9 & -8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 6 & -19 & 3 & 3 & -13 \\ -18 & 9 & -3 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

EJERCICIO 2.– (VALOR: 3 PUNTOS)

1. Sean A, B, C, D, E puntos distintos alineados. Probar que $|ABCD| = |ABCE||ABED|$.
2. Sean F, G dos homologías de centro O, eje e, $O \notin e$, y razones λ, μ, respectivamente, con $\lambda\mu \neq 1$. Demostrar que el producto FG es otra homología de centro O, eje e y razón $\lambda\mu$. ¿Qué será FG si $\lambda\mu = 1$?
3. Sea F la homología dada por los datos de la figura posterior: el centro O, el eje e, A y $F(A)$. Utilizando una homología G de razón -1, construir $H(B)$, siendo H la homología de centro O, eje e y razón$(H) = -$razón(F).

EJERCICIO 3.– (VALOR: 2 PUNTOS)

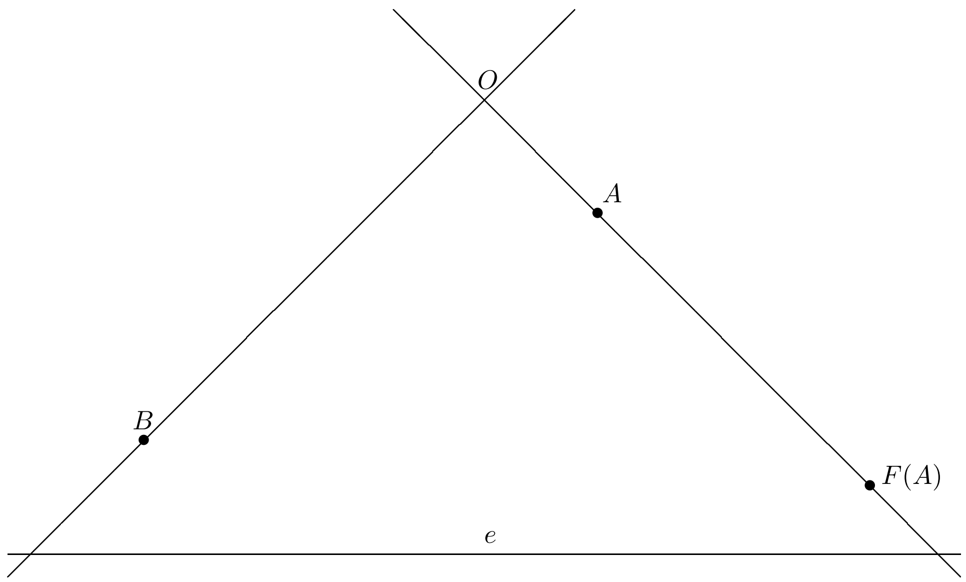
Sea la cónica afín Q de ecuación $x^2+2x+2y = 0$. Clasificarla. Sea $\overline{Q}$ la cónica proyectiva asociada y consideremos el cuadrivértice P_1, P_2, P_3, P_4, con $P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (1 : -2 : 0), P_3 = (1 : 2 : -4), P_4 = (0 : 0 : 1)$. Calcular los puntos diagonales de este cuadrivértice y comprobar que la polar del punto diagonal alineado con P_1 y P_3 es la recta que pasa por los otros dos puntos diagonales (digamos P, P').

EJERCICIO 4.– *(Valor: 2,5 puntos)* Consideremos la cuádrica afín Q de ecuación

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xz + 2 = 0.$$

Se pide:

1. Clasificarla, hallar sus planos principales, ejes y sus vértices.
2. ¿Qué tipos de cónicas afines se pueden obtener al cortar la cuádrica Q por un plano? Dar la ecuación de algún plano afín L que corte a Q en un par de rectas imaginarias (secantes en un punto real).


O
A
B
F(A)
e