Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1) *Valor 3.5 puntos*

Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3; U\}$ un sistema de referencia cualquiera en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se pide:

1. Hallar las ecuaciones, respecto de $\mathcal{R}$, de las variedades H_0, H_1, H_2, H_3 de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, dadas por
$$H_0 = L_p(P_1, P_2, P_3), \quad H_1 = L_p(P_2, P_3, U), \quad H_2 = L_p(P_1, P_3, U), \quad H_3 = L_p(P_1, P_2, U).$$
2. Deducir razonadamente la dimensión de la variedad L_A de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ cuyas ecuaciones respecto de $\mathcal{R}$ son
$$\left\{\begin{array}{l} a_0x_2 - a_1x_1 = 0 \\ a_0x_3 - a_2x_1 = 0 \\ a_1x_3 - a_2x_2 = 0 \end{array}\right. ,$$
donde $A = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
3. Establecer una relación entre $\{L_A, A \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\}$ y el conjunto de todas las rectas de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ que pasan por P_0.
4. Obtener los puntos $A \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{R}_A = \{P_0, L_A \cap H_0; L_A \cap H_1\}$ es un sistema de referencia en L_A. En ese caso, hallar la razón doble $\rho = |L_A \cap H_0, L_A \cap H_1, L_A \cap H_2, L_A \cap H_3|$, cuando esté definida. Deducir que el conjunto de puntos A de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tales que $\rho = -1$ es el lugar de una cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ cuya ecuación se pide.

Ejercicio 2) *Valor 2.5 puntos*

1. Describir la configuración de los puntos base y fundamentales de todos los haces de cónicas complejas.
2. Calcular la(s) parábola(s) superosculatrices (tipo 5) con $2x + 2xy - x^2 - 1 = 0$ en el punto $(1, 0)$. Para cada solución hallada, calcular el eje y el foco.

Ejercicio 3) *Valor 4 puntos*

Se considera el espacio proyectivo tridimensional real $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se da la familia de cuádricas proyectivas
$$\lambda(x_0^2 - 4x_1^2) + \mu(x_2^2 + x_2x_3 - 2x_3^2) = 0\,.$$
Se pide:

1). Clasificarla según los valores de λ y μ.

2). Para $\lambda = \mu = 1$ obtenemos una cuádrica de puntos hiperbólicos. Se sabe que el punto $P = (2 : 1 : 1 : 1)$ pertenece a la cuádrica lugar. Hallar dos puntos Q_1, Q_2 de la cuádrica lugar, distintos de P, tales que las rectas PQ_1 y PQ_2 sean las generatrices que pasan por P.

3). Se considera el espacio euclídeo sumergido en el proyectivo a la manera usual, es decir, tomando como hiperplano del infinito $x_0 = 0$. Las coordenadas afines serán designadas por x, y, z. Se pide clasificar la familia afín correspondiente según los valores de λ y μ.

4). Para $\lambda = \mu = 1$ obtenemos una cuádrica afín. Hallar su centro y su cono asintótico.

A