Métodos Matemáticos: Álgebra Lineal **7 de Febrero de 2002**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1 *(2 puntos)*.

1. Pruebe que una matriz A real de orden $m \times n, m \leq n$ admite una factorización
$$A = \begin{pmatrix} L & 0 \end{pmatrix} Q$$
donde L es triangular inferior de orden $m \times m$ y Q es una matriz ortogonal de orden $n \times n$. (Indicación: considere la descomposición QR de A^t).

2. Calcule la solución mínimo cuadrática de norma mínima del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 1$.

Ejercicio 2 *(2,5 puntos)*. Consideremos la sucesión definida por
$$p_0 = 1, p_n = 0, p_{i+1} = 2p_i - p_{i-1}, 1 \leq i \leq n-1.$$
Sean
$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} p_{k+1} \\ p_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \leq k \leq n-1.$$

1. Pruebe que para $1 \leq k \leq n-1$ se tiene que $\mathbf{v}_k = A\mathbf{v}_{k-1}$ y $\mathbf{v}_{n-1} = A^{n-1}\mathbf{v}_0$.

2. Calcule J la forma canónica de Jordan de A y una matriz de paso P. Deduzca que
$$J^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Usando los apartados anteriores, establezca que $p_1 = \frac{n-1}{n}, p_{n-1} = \frac{1}{n}$.

Ejercicio 3 *(2 puntos)*.

1. Sea A una matriz real no singular y consideremos $A = QR$ la descomposición QR de A y $A^tA = U^tU$ la factorización de Cholesky de A^tA, con U triangular superior, y las normalizaciones $r_{jj}, u_{jj} > 0$. ¿Es cierto que $R = U$?

2. Calcule la descomposición en valores singulares de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 *(1,5 puntos)*. Sea A una matriz simétrica real, que tiene el autovalor $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 8, y el resto de autovalores son, en valor absoluto, menores que 0.1. Describa un algoritmo que encuentre una base **ortonormal** del espacio de autovectores asociado a λ_1.

Ejercicio 5 *(2 puntos)*. Consideremos el sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 19 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$$

1. Resuelva el sistema mediante eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.

2. Determine las matrices D, E y F del método de Gauss-Seidel y si es convergente o no.