Métodos Matemáticos: Álgebra Lineal **23 de Enero de 2003**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1 *(1 punto)*. Construya ejemplos de matrices A y B de orden 2×2 que prueben la falsedad de las siguientes implicaciones:

1. Si λ es autovalor de A y μ es autovalor de B entonces $\lambda + \mu$ es autovalor de $A + B$.

2. Si λ es autovalor de A y μ es autovalor de B entonces $\lambda \cdot \mu$ es autovalor de $A \cdot B$.

Ejercicio 2 *(1.5 puntos)*. Sea A una matriz real de orden $m \times n$ con $\text{rango}(A) = n$. Sea P ortogonal tal que $PA = T = \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, donde R es una matriz triangular superior de orden $n \times n$. Si $P^t = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ con X matriz de orden $m \times n$, explique por qué las columnas de X constituyen una base ortonormal de $\text{im}(A)$.

Ejercicio 3 *(2 puntos)*.

1. Calcule la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   en función de los valores de a.

2. Una matriz A de orden 8 tiene los autovalores $0, 1, -1$ y verifica que

$$\begin{aligned} &\text{rg}(A) = 7, \text{rg}(A^2) = 6, \text{rg}(A^3) = 5 = \text{rg}(A^4), \\ &\text{rg}(A + I) = 6, \text{rg}((A + I)^2) = 5 = \text{rg}((A + I)^3), \\ &\text{rg}(A - I) = \text{rg}((A - I)^2). \end{aligned}$$

   Determine la forma canónica de Jordan de A.

Ejercicio 4 *(1.5 puntos)*. Definición de matriz de Householder. Aplicaciones.

Ejercicio 5 *(2 puntos)* Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Describa el método de cálculo de las soluciones mínimo cuadráticas de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Justifique por qué hay infinitas soluciones.

2. Calcule la solución mínimo cuadrática de norma mínima de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. ¿Cuántos valores singulares no nulos tiene la matriz A?