Ejercicio 1 *(1 punto)*. Construya ejemplos de matrices A y B de orden 2×2 que prueben la falsedad de las siguientes implicaciones:

1. Si λ es autovalor de A y μ es autovalor de B entonces $\lambda + \mu$ es autovalor de $A + B$.
2. Si λ es autovalor de A y μ es autovalor de B entonces $\lambda \cdot \mu$ es autovalor de $A \cdot B$.

Solución:

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Los autovalores de A son $1, -1$, y los de B son $1, 2$. Entonces $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ tiene como autovalores $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
2. Con las mismas matrices que en el caso anterior, tenemos que $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, con autovalores $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Ejercicio 2 *(1.5 puntos)*. Sea A una matriz real de orden $m \times n$ con $\text{rango}(A) = n$. Sea P ortogonal tal que $PA = T = \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, donde R es una matriz triangular superior de orden $n \times n$. Si $P^t = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ con X matriz de orden $m \times n$, explique por qué las columnas de X constituyen una base ortonormal de $\text{im}(A)$.

Solución. Como P es ortogonal, el rango de T es también n. En particular, R es una matriz invertible. Mediante multiplicación por bloque se tiene que $A = P^tT = XR$. Vamos a probar que $\text{im}(A) = \text{im}(X)$. Sea $\mathbf{w} \in \text{im}(A)$. Entonces existe $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{w} = X(R\mathbf{v})$, por lo que $\mathbf{w} \in \text{im}(X)$. Entonces $\text{im}(A) \subset \text{im}(X)$. Como $AR^{-1} = X$ se tiene de manera análoga $\text{im}(X) \subset \text{im}(A)$. Como X está formada por columnas de una matriz ortogonal, tenemos el resultado.

Ejercicio 3 *(2 puntos)*.

1. Calcule la forma canónica de Jordan de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
en función de los valores de a.
2. Una matriz A de orden 8 tiene los autovalores $0, 1, -1$ y verifica que
$$\begin{aligned} &\text{rg}(A) = 7, \text{rg}(A^2) = 6, \text{rg}(A^3) = 5 = \text{rg}(A^4), \\ &\text{rg}(A + I) = 6, \text{rg}((A + I)^2) = 5 = \text{rg}((A + I)^3), \\ &\text{rg}(A - I) = \text{rg}((A - I)^2). \end{aligned}$$
Determine la forma canónica de Jordan de A.

Solución.

1. El polinomio característico de la matriz es igual a $\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - a$. Si $a = 0$, entonces la única raíz es 0 con multiplicidad algebraica igual a 4. Observemos que entonces la matriz A ya está en forma canónica de Jordan (1 caja de orden 4).
Si $a \neq 0$, entonces el polinomio característico tiene 4 raíces complejas distintas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. En concreto, si $a > 0$, sea $\alpha = \sqrt[4]{a}$. Entonces las raíces son $\alpha, \alpha i, -\alpha, -\alpha i$. Si $a < 0$, sea $\alpha = \sqrt[4]{-a}$. Entonces las raíces son $\alpha \exp(i(2k + 1)\pi/4), k = 0, 1, 2, 3$.
En cualquier caso, la matriz es diagonalizable, y su forma canónica es
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$
2. Tenemos que
$$\dim\ker(A) = 1, \dim\ker(A^2) = 2, \dim\ker(A^3) = 3$$
y aquí se estabiliza. Por tanto, la multiplicidad algebraica del autovalor 0 es 3, y tiene asociado una caja de Jordan de orden 3. Por otro lado,

y en este espacio se estabiliza. Entonces la multiplicidad algebraica del autovalor -1 es 3, y tiene asociado una caja de Jordan de orden 2 y una de orden 1.

Por último, el autovalor 1 tiene multiplicidad algebraica $8-6=2$, y como se estabiliza en el primer subespacio tenemos que $\dim\ker(I-A)=2$. Tiene entonces asociado dos cajas de orden 1. En resumen, la forma canónica de Jordan de A es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 *(1.5 puntos)*. Definición de matriz de Householder. Aplicaciones.

Solución. Sea $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ un vector no nulo. Entonces la matriz de Householder asociada a $\mathbf{w}$ es

$$H(\mathbf{w}) = I_n - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^t}{\mathbf{w}^t\mathbf{w}}.$$

Estas matrices son simétricas y ortogonales. La propiedad fundamental la da el siguiente resultado:

Sea $\mathbf{v}$ un vector no proporcional a $\mathbf{e}_1$, y consideremos $\mathbf{w}=\mathbf{v}\pm\|\mathbf{v}\|\,\mathbf{e}_1$. Entonces $H(\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}=\mp\|\mathbf{v}\|\,\mathbf{e}_1$.

Enunciamos algunas de sus aplicaciones:

- Factorización QR de una matriz. Sea A una matriz de orden $m\times n$, con $\mathrm{rg}(A)=n$. Entonces existe Q ortogonal de orden m y $R=\begin{pmatrix} R_1 \\ 0\end{pmatrix}$ de orden $m\times n$ y R_1 triangular superior tales que $A=QR$. Mediante un proceso inductivo sobre las columnas de una matriz A, se pueden construir una sucesión de matrices de Householder $H_1,H_2,\ldots,H_{m-1}$ tales que $H_{m-1}\cdots H_2H_1A=R$. Como el producto de matrices ortogonales es ortogonal, la matriz Q es $H_1H_2\cdots H_{m-1}$.
- Construcción de una base ortonormal que contenga a un vector unitario dado. Sea $\mathbf{v}$ unitario. Entonces existe H una matriz de Householder tal que $H\mathbf{v}=\mathbf{e}_1$. Entonces $\mathbf{v}=H\mathbf{e}_1$, es decir, la primera columna de H es precisamente el vector $\mathbf{v}$. Por tanto, las columnas de H son la base buscada.
- Deflación de Householder. Si de una matriz A de orden n conocemos un autovalor λ_1 y un autovector asociado $\mathbf{v}_1$, entonces sea H matriz de Householder tal que $H\mathbf{v}_1=\alpha\mathbf{e}_1$. Entonces $HAH^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbf{b}^t \\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}$ donde B es una matriz de orden $n-1$ con los restantes autovalores de A. Además,si $\lambda_2\neq\lambda_1$ es otro autovalor de A y $\mathbf{w}_2$ es autovector asociado para la matriz B, entonces $\mathbf{v}_2=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\mathbf{b}^t\mathbf{w}_2$ es autovector de λ_2 en A.
- Construcción de la forma de Hessenberg superior de una matriz. El algoritmo QR se acelera si la matriz de partida está en forma de Hessenberg superior, que es una matriz con ceros por debajo de la subdiagonal. Se puede pasar mediante transformaciones de semejanza una matriz A a una en forma de Hessenberg superior con ayuda de las matrices de Householder, aplicando un proceso inductivo a las columnas de A, pero tomando el vector formado por las $n-1$ últimas componentes.

Ejercicio 5 *(2 puntos)* Consideremos

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & -2\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

1. Describa el método de cálculo de las soluciones mínimo cuadráticas de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Justifique por qué hay infinitas soluciones.
2. Calcule la solución mínimo cuadrática de norma mínima de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.
3. ¿Cuántos valores singulares no nulos tiene la matriz A?

Solución.

1. Para calcular las soluciones mínimo-cuadráticas de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ hay que resolver el sistema de ecuaciones $A^tA\mathbf{x}=A^t\mathbf{b}$. En este caso, $\mathrm{rg}(A)=2$, por lo que $\mathrm{rg}(A^tA)=2$, y el sistema será compatible indeterminado.

2. La solución mínimo-cuadrática de norma mínima es $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$. Como la matriz A no es de rango completo ni por filas ni por columnas, usaremos una factorización de rango pleno para su cálculo. La forma reducida por filas de A es

$$E_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $A = C \cdot F$, donde

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que calcular $A^+ = F^R C^L$. En este caso,

$$F^R = F^t(FF^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4/9 & 0 \\ 2/9 & 0 \end{pmatrix}, C^L = (C^tC)^{-1}C^t = \begin{pmatrix} -1/9 & 1/18 & -1/9 \\ -2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}, A^+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4/81 \\ -2/9 \\ -4/81 \\ -2/81 \end{pmatrix}.$$

3. Si $A = U\Sigma V^t$ es la descomposición en valores singulares de A, entonces es claro que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\Sigma)$. Pero $\mathrm{rg}(\Sigma)$ no es más que el número de valores singulares no nulos. Por tanto, en este caso, el número pedido de $\mathrm{rg}(A) = 2$.