Métodos Matemáticos: Álgebra Lineal **5 de Septiembre de 2003**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1 *(2,5 puntos)*

1. Sea $A = \begin{pmatrix} A_{*1} & \dots & A_{*n} \end{pmatrix}$ una matriz con columnas $A_{*1}, \dots, A_{*n}$ y H matriz de Householder asociada al vector $\mathbf{u}$. Pruebe que

$$H \cdot A_{*j} = A_{*j} - 2\left(\frac{\mathbf{u}^t A_{*j}}{\mathbf{u}^t \mathbf{u}}\right)\mathbf{u}.$$

2. Calcule una descomposición QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

mediante transformaciones de Householder. (Recuerde que $H \cdot A = \begin{pmatrix} HA_{*1} & HA_{*2} & HA_{*3} \end{pmatrix}$).

Solución.

1. La matriz de Householder asociada al vector $\mathbf{u}$ es $I - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}$. Entonces

$$H \cdot A_{*j} = (I - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}})A_{*j} = A_{*j} - 2(\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}})A_{*j} = A_{*j} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t A_{*j}}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}.$$

Observemos que $\mathbf{u}^t A_{*j}$ es un número. Por tanto,

$$H \cdot A_{*j} = A_{*j} - 2\frac{\mathbf{u}^t A_{*j}}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}\mathbf{u}.$$

2. Aplicamos lo anterior para el cálculo de la factorización. Sea $\mathbf{v}_1 = A_{*1}$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \|\mathbf{v}_1\|\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sea $H_1 = I - 2\frac{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t}{\mathbf{u}_1^t\mathbf{u}_1}$ la matriz de Householder asociada a $\mathbf{u}_1$. Entonces

$$H_1 A_{*2} = \begin{pmatrix} -25 \\ 24 \\ 7 \end{pmatrix}, H_1 A_{*3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 34/5 \\ 62/5 \end{pmatrix}$$

y

$$H_1 A = \begin{pmatrix} -5 & -25 & 4 \\ 0 & 24 & 34/5 \\ 0 & 7 & 62/5 \end{pmatrix}.$$

Consideremos B la submatriz de $H_1 A$ formada por las filas y columnas 2 y 3, y sea $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$ la primera columna de B. Tomemos ahora $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \|\mathbf{v}_2\|\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Sea $\hat{H}_2$ la matriz de Householder asociada a $\mathbf{u}_2$. Entonces

$$\hat{H}_2 B_{*2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Sea $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} -5 & -25 & 4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = R \text{ y } Q = H_1 H_2.$$

Ejercicio 2 *(2,5 puntos)* Sean

$$A = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule la solución mínimo cuadrática de norma mínima del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Calcule la descomposición en valores singulares de A.

Solución

1. La matriz A es de rango pleno por columnas. Por tanto, la solución mínimo-cuadrática es la solución del sistema $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

que es la solución buscada.

2. Calculamos en primer lugar los autovalores de A^tA, que por el apartado anterior es 1, con multiplicidad 3. Los valores singulares σ_i valen también 1. Una base ortonormal de autovectores de A^tA es $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. La matriz de valores singulares es

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$. Completamos con $\mathbf{u}_4$ a una base ortonormal. Por ejemplo, $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 *(2 puntos)* Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de polinomio característico $(\lambda + 1)^3$.

1. Calcule J la forma canónica de Jordan de la matriz A.

2. Calcule una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.

Solución. Resolvemos a la vez los dos apartados. Tenemos que $-I-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, que es de rango 1. Por tanto, $\dim V_1 = \dim \ker(-I-A) = 2$ y, sin necesidad de cálculo, $\dim V_2 = \dim \ker(-I-A)^2 = 3$. Esto significa que la forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Una base de V_1 está formada por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y una base de V_2 es $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Por tanto, tomamos $\mathbf{v}_{21} \in V_2$ que amplíe la base de V_1 a una base de V_2. Por ejemplo, $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{e}_2$. Entonces $\mathbf{v}_{11} = -(-I-A)\mathbf{v}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Escogemos $\mathbf{v}_{12} \in V_1$ que amplíe $\mathbf{v}_{21}$ a una base de $_V1$. Por ejemplo, sea $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{e}_3$. Entonces

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{21} & \mathbf{v}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 *(1 punto)* Determine el carácter verdadero o falso de las siguientes afirmaciones:

1. La factorización QR de una matriz con columnas independientes proporciona una base ortonormal del espacio de columnas de la matriz.

2. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Entonces $\text{rango}(AB) = \text{rango}(BA)$.

Solución

1. VERDADERO. La factorización QR no es más que la forma matricial del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt sobre el espacio de columnas de la matriz de partida.

2. FALSO. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\text{rango}(AB) = 2, \text{rango}(BA) = 1$.

Ejercicio 5 *(1 punto)* Ordene los siguientes sistemas según su mal condicionamiento:

$$a) \left.\begin{array}{rcl} 1{,}001x - y & = & {,}235 \\ x + {,}0001y & = & {,}765 \end{array}\right\}, b) \left.\begin{array}{rcl} 1{,}001x - y & = & {,}235 \\ x + {,}9999y & = & {,}765 \end{array}\right\}, c) \left.\begin{array}{rcl} 1{,}001x + y & = & {,}235 \\ x + {,}9999y & = & {,}765 \end{array}\right\}.$$

Resuelva el sistema c) con escalado, pivoteo parcial y aritmética de 4 dígitos en coma flotante.

Solución. Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1{,}001 & -1 \\ 1 & 0{,}0001 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1{,}001 & -1 \\ 1 & 0{,}9999 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1{,}001 & 1 \\ 1 & 0{,}9999 \end{pmatrix}.$$

Con respecto a la norma infinito, por ejemplo, tenemos

$$\text{cond}_\infty(A_1) = 4{,}0036, \text{cond}_\infty(A_2) = 2{,}0011, \text{cond}_\infty(A_3) = 4449{,}38.$$

Pasemos a resolver el sistema c). En primer lugar, escalamos la primera fila, multiplicando por 1/1.001. Nos queda

$$\left.\begin{array}{lcl} 1{,}000x + 0{,}9990y & = & {,}2348 \\ x + {,}9999y & = & {,}765 \end{array}\right\}$$

El mayor término de la segunda fila es 1, y no tenemos que hacer nada. Para el pivoteo parcial, observamos que ya el elemento $(1,1)$ es el mayor de la columna, por lo que no es necesario efectuar intercambio de filas. Eliminamos entonces la x de la segunda ecuación. Obtenemos

$$\left.\begin{array}{rlcl} 1{,}000x & +0{,}9990y & = & {,}248 \\ & 0{,}0009y & = & {,}5302 \end{array}\right\}$$

Entonces $y = 589{,}1, x = -588{,}3$.

Ejercicio 6 *(1 punto)* Determine, con el procedimiento iterado que prefiera, el autovalor dominante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Por ejemplo, usemos el método de la potencia con la norma infinito y vector inicial $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$. La iteración es

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}, \mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|_\infty}\mathbf{w}, \lambda = \|\mathbf{w}\|_\infty$$

y obtenemos la secuencia $1, 2, 1{,}625, 1{,}692, 1{,}682, ...$