Métodos Matemáticos: Álgebra Lineal **5 de Septiembre de 2003**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1 *(2,5 puntos)*

1. Sea $A = \begin{pmatrix} A_{*1} & \dots & A_{*n} \end{pmatrix}$ una matriz con columnas $A_{*1}, \dots, A_{*n}$ y H matriz de Householder asociada al vector $\mathbf{u}$. Pruebe que
$$H \cdot A_{*j} = A_{*j} - 2\left(\frac{\mathbf{u}^t A_{*j}}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}.$$

2. Calcule una descomposición QR de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$
mediante transformaciones de Householder. (Recuerde que $H \cdot A = \begin{pmatrix} HA_{*1} & HA_{*2} & HA_{*3} \end{pmatrix}$).

Ejercicio 2 *(2,5 puntos)* Sean
$$A = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule la solución mínimo cuadrática de norma mínima del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Calcule la descomposición en valores singulares de A.

Ejercicio 3 *(2 puntos)* Consideremos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
de polinomio característico $(\lambda + 1)^3$.

1. Calcule J la forma canónica de Jordan de la matriz A.
2. Calcule una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.

Ejercicio 4 *(1 punto)* Determine el carácter verdadero o falso de las siguientes afirmaciones:

1. La factorización QR de una matriz con columnas independientes proporciona una base ortonormal del espacio de columnas de la matriz.
2. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Entonces rango(AB) = rango(BA).

Ejercicio 5 *(1 punto)* Ordene los siguientes sistemas según su mal condicionamiento:
$$a) \left.\begin{array}{rcl} 1{,}001x - y &=& {,}235 \\ x + {,}0001y &=& {,}765 \end{array}\right\}, b) \left.\begin{array}{rcl} 1{,}001x - y &=& {,}235 \\ x + {,}9999y &=& {,}765 \end{array}\right\}, c) \left.\begin{array}{rcl} 1{,}001x + y &=& {,}235 \\ x + {,}9999y &=& {,}765 \end{array}\right\}.$$
Resuelva el sistema c) con escalado, pivoteo parcial y aritmética de 4 dígitos en coma flotante.

Ejercicio 6 *(1 punto)* Determine, con el procedimiento iterado que prefiera, el autovalor dominante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$