

APELLIDOS:	NOMBRE:
------------	---------

**Ejercicio 1** (1 punto). Suponiendo que las inversas existen, pruebe que

1.  $(I + A^{-1})^{-1} = A(A + I)^{-1}$ .
2.  $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$ .
3.  $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$ .

**Ejercicio 2** (2,5 puntos).

1. Calcule una descomposición QR, con  $Q$  matriz ortogonal de orden 3, de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determine la descomposición en valores singulares de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 3** (1,5 puntos). Sea  $A$  una matriz cuadrada real. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si  $\lambda$  es autovalor de  $A$  y  $\mu \in \mathbb{R}$  entonces  $\lambda - \mu$  es autovalor de  $A - \mu I$ .
2. Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  entonces también lo es  $\bar{\lambda}$ .
3. Si todos los autovalores de  $A$  son nulos entonces  $A = 0$ .
4. Si  $A$  es simétrica y  $\lambda$  es autovalor de  $A$  entonces  $|\lambda|$  es valor singular de  $A$ .
5. Si  $A$  es diagonalizable y todos sus autovalores son iguales entonces  $A$  es diagonal.

**Ejercicio 4** (2 puntos). Una compañía tiene los siguientes datos sobre beneficios en tres años:

Año	1	2	3
Beneficio	7	4	3

Si suponemos que hay una tendencia lineal en el descenso de beneficios, prediga el año y mes en que la compañía entrará en pérdidas.

**Ejercicio 5** (1,5 puntos). Consideremos un sistema lineal de la forma  $Ax = \mathbf{b}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determine las matrices  $D$ ,  $E$  y  $F$  de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
2. Establezca que es convergente para Gauss-Seidel.

**Ejercicio 6** (1,5 puntos). Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

de polinomio característico  $\lambda^4 - \frac{5}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$ .

1. Calcule  $J$  la forma canónica de Jordan de la matriz  $A$ .
2. Calcule una matriz de paso  $P$  tal que  $J = P^{-1}AP$ .
3. ¿Existe  $\lim A^k$ ?