Ejercicio 1. Suponiendo que las inversas existen, pruebe que

1. $(I + A^{-1})^{-1} = A(A + I)^{-1}$.
2. $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$.
3. $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$.

Solución del Ejercicio 1.-

1. $(I + A^{-1}) \cdot A(A + I)^{-1} = (A + I)(A + I)^{-1} = I$.
2. $(A^{-1} + B^{-1}) = (A^{-1}(I + AB^{-1}))^{-1} = (I + AB^{-1})^{-1}A$. Si llamamos $C = BA^{-1}$ y aplicamos el apartado anterior

   $$(A^{-1}+B^{-1}) = (I+C^{-1})^{-1}A = C(C+I)^{-1}A = BA^{-1}(BA^{-1}+I)^{-1}A = B((BA^{-1}+I)A)^{-1}A = B(B+A)^{-1}A.$$

   La otra igualdad se obtiene intercambiando los papeles de A y B.
3. $(I + AB)^{-1}A = (A(A^{-1} + B))^{-1}A = (A^{-1} + B)^{-1} = ((I + BA)A^{-1})^{-1} = A(I + BA)$.

Ejercicio 2.

1. Calcule una descomposición QR, con Q matriz ortogonal de orden 3, de la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determine la descomposición en valores singulares de la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del Ejercicio 2.-

1. Recordemos que la descomposición QR no es más que la forma matricial del método de ortonormalización de Gram-Schmidt aplicado a las columnas de la matriz dada. Sean entonces

   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   y llamemos $\mathbf{q}_1' = \mathbf{v}_1$. Si $\mathbf{q}_2' = \mathbf{v}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1'$, la condición $\mathbf{q}_1' \perp \mathbf{q}_2'$ implica que $r_{12} = 0$. Normalizamos y nos queda

   $$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   de donde $\mathbf{v}_1 = \sqrt{2}\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2$. Entonces

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{Q}\hat{R}.$$

   Esta es una descomposición QR reducida. Como nos están pidiendo que Q sea ortogonal, debemos construir una factorización completa. Esto no es más que completar las columnas de $\hat{Q}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Para ello, consideremos por ejemplo $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)^t$y llamamos $\mathbf{q}_3' = \mathbf{v}_3 - r_{13}\mathbf{e}_1 - r_{23}\mathbf{e}_2$. Entonces $r_{13} = 1/\sqrt{2}, r_{23} = 0$ y

   $$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{q}_3'\|}\mathbf{q}_3' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   Entonces

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = QR.$$

2. Sea A la matriz dada. La descomposición en valores singulares comienza con el cálculo de los autovalores de

$$A^tA = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

que son $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$. Entonces $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$ y la matriz de valores singulares es

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos una base ortonormal de autovectores de A^tA y obtenemos

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ampliamos, mediante Gram-Schmidt, a una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y nos queda

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces que $A = U\Sigma V^t$.

Ejercicio 3. Sea A una matriz cuadrada real. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si λ es autovalor de A y $\mu \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda - \mu$ es autovalor de $A - \mu I$.
2. Si λ es un autovalor de A entonces también lo es $\bar{\lambda}$.
3. Si todos los autovalores de A son nulos entonces $A = 0$.
4. Si A es simétrica y λ es autovalor de A entonces $|\lambda|$ es valor singular de A.
5. Si A es diagonalizable y todos sus autovalores son iguales entonces A es diagonal.

Solución del Ejercicio 3.-

1. VERDADERO. Si existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $(A - \mu I)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - \mu\mathbf{v} = (\lambda - \mu)\mathbf{v}$.
2. VERDADERO. Como A es real, su polinomio característico tiene coeficientes reales. Por tanto, si λ es raíz del polinomio entonces su conjugado $\bar{\lambda}$ también lo es.
3. FALSO. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. VERDADERO. Los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los autovalores no nulos de A^tA. Como A es simétrica, $A^tA = A^2$. Si λ es autovalor de A, entonces λ^2 es autovalor de A^2, por lo que $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$ es valor singular de A.
5. VERDADERO. Si A es diagonalizable, existe P tal que $D = PAP^{-1}$, donde D es diagonal. Como todos los autovalores son iguales, $D = \lambda I$. Entonces $A = P^{-1}\lambda IP = \lambda I = D$.

Ejercicio 4. Una compañía tiene los siguientes datos sobre beneficios en tres años:

Año	1	2	3
Beneficio	7	4	3

Si suponemos que hay una tendencia lineal en el descenso de beneficios, prediga el año y mes en que la compañía entrará en pérdidas.

Solución del Ejercicio 4.- Por hipótesis, suponemos que existe una relación de la forma $b = \alpha + \beta t$, donde b es el beneficio y t es el año. Se trata de calcular la solución mínimo-cuadrática del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} \alpha & + & \beta & = 7 \\ \alpha & + & 2\beta & = 4 \\ \alpha & + & 3\beta & = 3 \end{array} \right., A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \cdots \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

La matriz A es de rango completo. Por tanto, basta calcular la solución del sistema $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Obtenemos $\alpha = 26/3, \beta = -2$. El beneficio será nulo en $t = 13/3$, esto es, el primero de Mayo del quinto año.

Ejercicio 5. Consideremos un sistema lineal de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determine las matrices D, E y F de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

2. Establezca que es convergente para Gauss-Seidel.

Solución del Ejercicio 5.-

1. $D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. La matriz asociada al método de Gauss-Seidel es

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

   Su radio espectral es $1/2 < 1$, por lo que el proceso es convergente.

Ejercicio 6 *(1,5 puntos)*. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

de polinomio característico $\lambda^4 - \frac{5}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$.

1. Calcule J la forma canónica de Jordan de la matriz A.

2. Calcule una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.

3. ¿Existe $\lim A^k$?

Solución del Ejercicio 6.-

1. Los autovalores son $\lambda = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1/2, \lambda_4 = -1/2$, cada uno de multiplicidad algebraica igual a 1. Por tanto, la matriz es diagonalizable, y su forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2. La matriz de paso P tendrá como columnas los autovectores asociados a los λ_i. Hay que resolver los sistemas lineales homogéneos $(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para $i = 1,2,3,4$. Entonces nos queda

$$\begin{aligned} V_1(\lambda_1) &= \ker(\lambda_1 I - A) = \langle (1/2, 1, 1, 1/2)^t \rangle, \\ V_1(\lambda_2) &= \ker(\lambda_2 I - A) = \langle (-1/2, 1, -1, 1/2)^t \rangle, \\ V_1(\lambda_3) &= \ker(\lambda_3 I - A) = \langle (1, 1, -1, -1)^t \rangle, \\ V_1(\lambda_4) &= \ker(\lambda_4 I - A) = \langle (-1, 1, 1, -1)^t \rangle \end{aligned}$$

   y

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Tenemos que $A^k = PJ^kP^{-1}$. Si existe $\lim A^k$ entonces existe $\lim J^k$, pero este límite no existe porque, por ejemplo, el elemento $(2,2)$ presenta una oscilación entre 1 y -1. (Análogo para el $(4,4)$).