ALGEBRA I (Primero de Estadística). 3-9-2001

Nombre y apellidos ....

Ejercicio 1.– (2 pt.) Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. Sean V y W dos variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ de manera que $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. ¿Es cierto que $\mathbb{R}^n = V^\perp \oplus W^\perp$?
2. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineal con n incógnitas. Discutir si:
   (a) $r(A) > n$
   (b) $r(A|\mathbf{b}) > n$
3. Si $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m\}$ es un sistema generador de la variedad lineal L, entonces $\dim L = m$.

Ejercicio 2.– (4 pt.) Se consideran en $\mathbb{R}^4$ las variedades lineales:

$$\mathrm{L}_1 = L\{(0,1,1,0),(1,1,0,0),(2,3,1,0)\} \quad \mathrm{L}_2 = \left\{ \begin{array}{c} y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

1. Calcular unas ecuaciones implícitas de $L_1 + L_2$ y paramétricas de $L_1 \cap L_2$. ¿Es cierto que $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$?.
2. Calcular una B.O.N. de ${L_1}^\perp$. Sea el vector $\mathbf{a} = (1,0,2,0)$. Calcular $\Pi_{L_1}(\mathbf{a})$ y $\Pi_{{L_1}^\perp}(\mathbf{a})$
3. Buscar la pseudosolución óptima del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcular el conjunto $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \quad \Pi_{L_1}(\mathbf{x}) = (0,1,1,0)\}$. Estudiar si C tiene estructura de variedad lineal.

Ejercicio 3.– (4 pt.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha + \beta^2 & \beta & \alpha \\ 0 & \beta^2 & \alpha^2 + \beta & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & 2\alpha + \beta^2 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Estudiar los valores de α y de β para los que la matriz A admite factorización LR. Efectuar dicha factorización en los casos que sea posible.
2. Calcular la factorización de Cholesky en los casos donde haya lugar.
3. Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ resolver el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (3,7,5,8)$