ALGEBRA I (Primero de Estadística). 3-2-03 Tipo A

Nombre y apellidos ....

Ejercicio 1.– (3.5 pt.)

1. Consideremos las siguientes variedades lineales de $\mathbb{R}^4$:

$$F : L(\{(0,1,2,1),(1,0,1,0)\}) \qquad G : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & + & z & & = & 0 \\ & y & + & 2z & + \; t & = & 0 \end{array} \right.$$

   Se pide:

   - Calcular unas ecuaciones implícitas independientes de F y una base de G.
   - Es $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$? Por qué ?
   - Es $F \perp G$? Por qué ?

2. Sean M, N dos variedades lineales de $\mathbb{R}^n$, M generada por $\{a_1, \ldots, a_r\}$ y N generada por $\{b_1, \ldots, b_s\}$. Decidir, dando una BREVE explicación, si cada una las siguientes afirmaciones son ciertas SIEMPRE, NUNCA, o A VECES:

   (a) $dim(M) > r$.

   (b) $dim(N) < s$.

   (c) $dim(M+N) = r+s$

   (d) $dim(M \cap N) \leq r$.

   (e) El número de ecuaciones implícitas de N es $\geq n-s$.

   (f) $M \oplus N = \mathbb{R}^n$.

   (g) $(M^{\perp})^{\perp} = M$

   (h) $dimM + dimN \leq n$

Ejercicio 2.– (3.5 pt.)

1. Calcular la pseudosolución óptima del sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (1,2,1,2)$ y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sea la variedad lineal $L = L\{(1,1,1,1),(1,0,1,0),(5,4,5,4)\}$.

   (a) Comprobar que $L = C(A)$.

   (b) Dados los vectores $\mathbf{b} = (1,2,1,2)$ y $\mathbf{c} = (-1,0,1,0)$ calcular $\Pi_L(\mathbf{b})$, $\Pi_L(\mathbf{c})$ y $\Pi_L(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

   (c) Razonar si es cierto que en general dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y una variedad lineal L en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\Pi_L(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \Pi_L(\mathbf{b}) + \Pi_L(\mathbf{c})$.

   (d) Razonar también si dado un vector $\mathbf{x}$ y una variedad lineal L en $\mathbb{R}^n$ es cierto que $dist\,(L,\mathbf{x}) = \| \Pi_{L^{\perp}}(\mathbf{x}) \|$.

Ejercicio 3.– (3 pt.) Consideremos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -6+4\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) Para qué valores de λ tiene A una descomposición LR? y de Cholesky?

2) Calcular la descomposición LR de A para los valores que tenga sentido.

3) Para $\lambda = 0$, calcular la solución del sistema, usando la descomposición del apartado 1.