Ejercicio 1.- (4 puntos) En $\mathbf{R}^4$ se consideran las variedades lineales siguientes:

$$F = L((0,1,1,0),(1,0,1,0)) \quad G\colon x_1 - x_4 = 0.$$

Se pide:
1.– Calcular $F \cap G$, $F + G$, $(F \cap G)^\perp$, $F^\perp$, $G^\perp$.
2.– Encontrar una variedad L tal que $G \oplus L = \mathbf{R}^4$.
3.– Calcular una base ortonormal de G.
4.– Sea el vector $\mathbf{b} = (3,1,1,-1)$. Calcular $\Pi_G(\mathbf{b})$ y $\Pi_{G^\perp}(\mathbf{b})$.
5.– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

buscar la pseudosolución óptima del sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es el vector del apartado anterior.

Solución: Comencemos hallando un sistema de ecuaciones que defina a F. Un tal sistema viene dado por

$$2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & = 0 \\ & & & & & x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

También es sencillo hallar una base de G a partir del sistema dado. Tomamos x_2, x_3, x_4 como parámetros y obtenemos

$$G = \langle (1,0,0,1),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0) \rangle.$$

1.– A partir de aquí, y teniendo en cuenta los resultados de teoría, el primer apartado es trivial:

- Un sistema de ecuaciones de $F \cap G$ es el dado por

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

- Un sistema generador de $F + G$ es

$$F + G = \langle (0,1,1,0),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0) \rangle = \mathbf{R}^4$$

- Un sistema de ecuaciones de $F^\perp$ es el que tiene por matriz aquélla cuyas filas son los generadores de F:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} & & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

- Del mismo modo una base de G viene dada por las filas de la matriz del sistema de ecuaciones que lo define, o sea:

$$G^\perp = \langle (1,0,0,-1) \rangle.$$

2.- Para hallar L tal que $G \oplus L = \mathbf{R}^4$ recordemos de teoría que basta hallar un conjunto de vectores que amplíe la base de G hasta una de $\mathbf{R}^4$: esos vectores nos sirven como sistema generador de L. Dado que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

podemos tomar, por ejemplo,

$$L = \langle (1,0,0,0) \rangle.$$

3.– Comencemos por darles nombre a los vectores de la base hallada en 1):

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,0,0),\ \mathbf{v}_3 = (0,0,1,0).$$

Como sabemos el procedimiento de Gram–Schmidt tiene dos partes: una primera que nos da una base ortogonal y una segunda que nos da la base ortonormal buscada. En nuestro ejemplo, es inmediato darse cuenta de que la base de la que partimos ya es ortogonal; así que si aplicamos el primer paso nos va a dar la misma base. Por tanto, una base ortonormal de G es, simplemente,

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}, \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||}, \frac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0) \right\}.$$

4.– Usaremos una de las posibilidades dadas en teoría. Dado que $\mathbf{R}^4 = G \oplus G^\perp$, dado $\mathbf{b}$ existen vectores únicos $\mathbf{u} \in G$, $\mathbf{v} \in G^\perp$ tales que $\mathbf{b} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. En estas condiciones, $\mathbf{u} = \Pi_G(\mathbf{b})$ y $\mathbf{v} = \Pi_{G^\perp}(\mathbf{b})$. Escribimos entonces

$$\begin{aligned} (3,1,1,-1) &= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= [\alpha_1(1,0,0,1) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0)] + [\beta(1,0,0,-1)] \\ &= (\alpha_1 + \beta, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 - \beta), \end{aligned}$$

sistema de ecuaciones que tiene por solución

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,\ \beta = 2,$$

con lo que

$$\mathbf{u} = \Pi_G(\mathbf{b}) = (1,1,1,1),\ \mathbf{v} = \Pi_{G^\perp}(\mathbf{b}) = (2,0,0,-2).$$

5.– Es muy sencillo comprobar que

$$\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A|\mathbf{b}) = 4,$$

por lo que, para hallar las pseudosoluciones, hemos de pasar al sistema asociado $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Efectuadas las operaciones, este sistema resulta

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 2 \\ & & 2y & & & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 1,\ y = 1,\ z = 0.$$

Al ser esta la única pseudosolución, es la pseudosolución óptima.

Ejercicio 2.- (3 puntos) Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 2 \\ \alpha & \alpha+\beta & 1+\beta & 3 \\ \alpha & \alpha+\beta & 1+\alpha+\beta & 3+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & 1+\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

1.– Estudiar para qué valores de α y β existe factorización LR y efectuar, en caso de que sea posible, dicha factorización.

2.– Para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ resolver el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde $\mathbf{b} = (5, 8, 10, 7)$.

3.– Para $\alpha = 4$ y $\beta = 0$ ¿existe factorización de Cholesky? En caso afirmativo calcular dicha factorización.

Solución: 1.– Hallemos en primer lugar la forma escalonada por filas de A. Ésta resulta, si suponemos $\alpha \neq 0$

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

verificándose

$$R = F_{43}(-1)F_{32}(-1)F_{42}(-1)F_{31}(-1)F_{21}(-1)A.$$

Esto nos indica, por un lado que $|A| = \alpha^4$, por lo que ha de ser $\alpha \neq 0$ para que exista la factorización LR. Pero, por otro lado, si $\alpha \neq 0$, hemos hallado la forma escalonada sin permutar filas, por lo que existe la factorización LR, como se vio en teoría. Así pues, la condición necesaria y suficiente buscada es $\alpha \neq 0$. En este caso

$$\begin{aligned} A &= F_{21}(-1)^{-1}F_{31}(-1)^{-1}F_{42}(-1)^{-1}F_{32}(-1)^{-1}F_{43}(-1)^{-1}R \\ &= F_{21}(1)F_{31}(1)F_{42}(1)F_{32}(1)F_{43}(1)R, \end{aligned}$$

de donde

$$L = F_{21}(1)F_{31}(1)F_{42}(1)F_{32}(1)F_{43}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.– Ya que tenemos hecha la factorización LR, la aprovecharemos para resolver el sistema, descomponiéndolo en dos sistemas escalonados: $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$. En primer lugar tenemos

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & & & & & & & = & 5 \\ y_1 & + & y_2 & & & & & = & 8 \\ y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 10 \\ & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow y_1 = 5,\ y_2 = 3,\ y_3 = 2,\ y_4 = 2.$$

Y, en segundo,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2.$$

3.– Pregunta no muy difícil ésta: no puede existir la factorización de Cholesky porque la matriz no es simétrica.

Ejercicio 3.- (3 puntos) Razonar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, dando una prueba si es cierto o un contraejemplo en caso contrario.

1.– Sean L_1 y L_2 variedades lineales de $\mathbf{R}^n$ y B_1 y B_2 bases de dichas variedades. $B_1 \cup B_2$ siempre es base de $L_1 + L_2$.

2.– Sean L_1 y L_2 variedades lineales de $\mathbf{R}^n$ de dimensiones r y s respectivamente, entonces $(L_1 + L_2)^\perp$ tiene dimensión $n - (r + s)$.

3.– Todo sistema de ecuaciones lineal homogéneo con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas es compatible determinado.

Solución: 1.– El enunciado es falso: de hecho, como se vió en teoría, $B_1 \cup B_2$ es base de $L_1 + L_2$ si y sólo si $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$. Un contraejemplo concreto lo dan F y G del ejercicio 1. La unión de una base de F y una de G no puede ser base de $F + G$ porque tiene cinco elementos, siendo $F + G \subset \mathbf{R}^4$.

2.– Este enunciado también es falso. Sabemos que $(L_1 + L_2) \oplus (L_1 + L_2)^\perp = \mathbf{R}^n$, por lo que

$$\begin{array}{rcl} \dim(L_1 + L_2)^\perp & = & n - \dim(L_1 + L_2) \\ & = & n - (\dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)) \\ & = & n - (r + s) + \dim(L_1 \cap L_2). \end{array}$$

Un contraejemplo vuelve a ser $L_1 = F$, $L_2 = G$ del ejercicio 1. Como $F + G = \mathbf{R}^4$ tenemos que $(F + G)^\perp = \{\mathbf{0}\}$, que tiene dimensión 0. Sin embargo

$$n - (r + s) = 4 - (3 + 2) = -1 \neq 0.$$

3.– Este enunciado es, para no variar, falso; y un contraejemplo muy simple podría ser

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

que es un sistema lineal homogéneo compatible con tantas ecuaciones como incógnitas pero obviamente indeterminado.