ALGEBRA II (Primero de Estadística). (6-9-00) Tipo A

Nombre y apellidos ....

Ejercicio 1.– (3.5 pt.) Las temperaturas en una ciudad pueden ser las pronosticadas por el servicio de metereología, más altas o más bajas. Si las temperaturas son altas hoy, lo serán mañana con una probabilidad de 0.6 y más bajas con una probabilidad del 0.2. Si las temperaturas coinciden con las del pronóstico, serán más altas o más bajas con probabilidades de 0.25 y 0.25 respectivamente, mientras que si son más bajas la probabilidad de que sean más altas o más bajas son 0.25 y 0.50.

Escribir la matriz de transición, estudiar el estado del sistema en el día n-ésimo y describir la evolución de dicho sistema a largo plazo.

Ejercicio 2.– (2.5 pt.) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que verifica:

- Dado el vector $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ se tiene $f(0,0,1) = (0,0,1)$
- $f^2(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ si $\mathbf{v} \in L$ donde L es la variedad lineal dada por la ecuación implícita $z = 0$.

1. Sea $\mathbf{v} \in L$ un autovector de la variedad L asociado a un autovalor λ. ¿Qué posibles valores puede tomar el autovalor λ?
2. Sea $\mathbf{v}_1$ un vector de L que no es autovector. Probar que el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$
3. Probar que la matriz de f en la base anterior es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Estudiar si f es diagonalizable, inyectiva, sobreyectiva, ortogonal y proyección.

Ejercicio 3.– (4 pt.) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^4$ se consideran la recta r y los planos π_1 y π_2 dados por:

$$r : (3,1,2,0) + < (0,0,0,1) >$$

$$\pi_1 : (1,0,0,0) + < (0,1,0,1), (1,1,-1,0) > \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{cccc} x & & +t & = 6 \\ & y \quad +z & -t & = 0 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Estudiar las posiciones relativas de r y π_1, r y π_2, π_1 y π_2.
2. Hallar, si existen y si no decir por qué, las siguientes variedades afines:
   a) Hiperplano paralelo a π_1 y π_2 que pase por $(1,1,1,1)$.
   b) Hiperplano que contenga a r y a π_1.
   c) Hiperplano que contenga a r y a π_2.
3. Hallar la perpendicular común a r y π_1 y la distancia entre ambas variedades.