ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS **Examen final** **29-01-2003**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1. *(4 puntos)* Sea A un dominio de integridad, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y $Q(A)$ el cuerpo de fracciones de A. Consideremos $A_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{b} \in Q(A) \quad | \quad b \notin \mathfrak{p}\}$.
1) Probar que $A_{\mathfrak{p}}$ es un subanillo de $Q(A)$. Si A es local de ideal maximal $\mathfrak{m}$, describir $A_{\mathfrak{m}}$.
2) Probar que $\overline{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{p}} \quad | \quad a \in \mathfrak{p}\}$ es el único ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$.
Sea M un $A-$módulo. En $M \times (A - \mathfrak{p})$ definimos la siguiente relación:

$$(m, b) \sim (m', b') \Leftrightarrow \exists t \in A - \mathfrak{p} : t(b'm - bm') = 0.$$

3) Probar que es de equivalencia.
Denotemos por $\frac{m}{b}$ la clase de equivalencia de (m, b) y por $M_{\mathfrak{p}}$ el conjunto de las clases de equivalencia, $M_{\mathfrak{p}} = \{\frac{m}{b} \quad | \quad m \in M, b \notin \mathfrak{p}\}$. $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}-$módulo (y un $A-$módulo) con las operaciones

$$\frac{m}{b} + \frac{m'}{b'} = \frac{b'm + bm'}{bb'}, \quad \frac{a}{c}\frac{m}{b} = \frac{am}{cb} \quad (a\frac{m}{b} = \frac{am}{b})$$

4) Sea $f \in Hom(M, N)$. Se define $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ como $f_{\mathfrak{p}}(\frac{m}{b}) = \frac{f(m)}{b}$. Probar que $f_{\mathfrak{p}}$ está bien definido y es un homomorfismo de $A_{\mathfrak{p}}-$módulos.
5) Probar que los elementos de $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$ son de la forma $\frac{1}{b} \otimes m$ con $b \notin \mathfrak{p}$, $m \in M$.
6) Definir una aplicación bilineal de $A_{\mathfrak{p}} \times M$ en $M_{\mathfrak{p}}$ y usarla para probar que $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M \simeq M_{\mathfrak{p}}$.

Ejercicio 2.- (*2 puntos*) En $\mathbf{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = (x^2y + z, xz + y)$. Se pide:

1. Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico con $x < y < z$.
2. ¿Es $G = \{x^2y + z, xz + y, yz - y\}$ una base de Gröbner de I para el orden lexicográfico graduado con $x > y > z$?

Ejercicio 3.-(*2 puntos*) Sea k un cuerpo **no** algebraicamente cerrado.

a) Probar que si $\mathfrak{m}$ es un ideal **maximal** de $k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces el conjunto algebraico $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$ es vacío o un punto.
b) Dar explícitamente un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ que **no** sea de la forma

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n), \quad a_i \in k$$

.

Ejercicio 4. *(2 puntos)*

1. Sea λ un número complejo. Sea $f : \mathbf{C}^6 \to \mathbf{C}^6$ el endomorfismo $\mathbf{C}$-lineal de matriz (respecto de la base canónica)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Consideremos a $\mathbf{C}^6$ como $\mathbf{C}[X]$-módulo a través de la acción de f de la manera habitual. Calcule sus factores invariantes y aplíquele el teorema de estructura de los módulos f.g. sobre un D.I.P.. ¿Cuál es el anulador de $\mathbf{C}^6$ como $\mathbf{C}[X]$-módulo? ¿y como $\mathbf{C}$-módulo?

2. Sea $G = \mathbf{Z}/\mathbf{Z}3$, grupo cíclico de orden 3. Probar que toda representación irreducible de G en un espacio vectorial complejo de dimensión finita es de dimensión 1.
Sea $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, que verifica $B^3 = I$. Consideremos la representación $\rho : G \to GL(2, \mathbf{R})$ dada por $\rho(\overline{n}) = B^n$. ¿Es ρ una representación irreducible?