ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS **Examen final** **2-02-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- (3 puntos) Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $k = A/\mathfrak{m}$, M un $A-$módulo de tipo finito, $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$, espacio vectorial sobre k. Supongamos que $dim(\overline{M}) = r$.
1) Probar que si $m_1, \ldots, m_r \in M$ son tales que sus clases $\{m_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, m_r + \mathfrak{m}M\}$ son base de $\overline{M}$, entonces $\{m_1, \ldots, m_r\}$ forman un sistema de generadores minimal de M.
2) Probar que todo sistema de generadores minimal de M se obtiene de esa forma y posee r elementos.
3) Probar que M es isomorfo a un cociente de A^r. Construir una sucesión de $A-$módulos del tipo

$$0 \to N' \to A^r \to M \to 0.$$

4) Probar que M es libre ($M \simeq A^r$) si y sólo si se verifica que: para toda sucesión exacta de A-módulos

$$0 \to N' \to N \to M \to 0,$$

la sucesión inducida

$$0 \to N'/\mathfrak{m}N' \to N/\mathfrak{m}N \to \overline{M} \to 0$$

también es exacta. (Indicación: para probar $\Leftarrow$ usar la sucesión exacta construida en 3) y probar que el homomorfismo sobreyectivo de A^r en M es biyectivo.)

Ejercicio 2.- (1,5 puntos) En el anillo $\mathbf{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = (x^3 - 2xy, 2y^2 - x, x^2)$. Hallar la base de Gröbner reducida del ideal I para el orden lexicográfico graduado.

Ejercicio 3.- (2 puntos) Sea $h(x)$ un polinomio en el anillo $\mathbf{C}[x]$ y sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios múltiplos de $h(x)$.

1. Probar que la aplicación $\Phi : \frac{\mathbf{C}[x]}{(f(x))} \times \frac{\mathbf{C}[x]}{(g(x))} \to \frac{\mathbf{C}[x]}{(h(x))}$, definida por $\phi(p(x)+(f(x)), q(x)+(g(x))) = p(x)q(x)+(h(x))$ está bien definida y es $\mathbf{C}[x]$-bilineal.
2. En el caso particular de que $h(x)$ sea el máximo común divisor de $f(x)$ y $g(x)$, probar que el producto tensorial $\frac{\mathbf{C}[x]}{(f(x))} \otimes \frac{\mathbf{C}[x]}{(g(x))}$ es isomorfo a $\frac{\mathbf{C}[x]}{(h(x))}$.

Ejercicio 4.- (2 puntos) Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado, y $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ un conjunto algebraico finito, $V = \mathcal{V}(I)$ donde $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal.

1. Probar que si I es un ideal radical, entonces el cardinal de V coincide con la dimensión como k espacio vectorial de $k[x_1, \ldots, x_n]/I$. Es decir,
$$\sharp V = \dim(k[x_1, \ldots, x_n]/I).$$
(Indicación: En el caso $V = \{P_1, \ldots, P_r\}$ considerar polinomios f_i verificando $f_i(P_j) = 0$ si $i \neq j$ y $f_i(P_i) = 1$ para $1 \leq i, j \leq r$.)
2. Dar un ejemplo de un ideal I no radical, para el que no se verifique la igualdad anterior.

Ejercicio 5.- (1,5 puntos) En el $\mathbf{C}[x]$-módulo $\mathbf{C}[x]^3$, consideramos el submódulo M' generado por $\{a_1, a_2, a_3\} \in \mathbf{C}[x]^3$:

$$a_1 = (x, 1, 2), \quad a_2 = (0, x-1, 4), \quad a_3 = (-1, -1, x-2).$$

1. Calcular los factores invariantes del $\mathbf{C}[x]$-módulo $\frac{\mathbf{C}[x]^3}{M'}$.
2. Deducir del apartado anterior los autovalores del endomorfismo $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, definido por
$$f(1,0,0) = (0,-1,-2), \; f(0,1,0) = (0,1,-4), \; f(0,0,1) = (1,1,2).$$