ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS **Primera convocatoria** **4-2-2005**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- (*2 puntos*) Pruebe o de un contrajemplo:

1. La intersección de dos ideales primos es primo.
2. La suma de dos ideales primos es primo.
3. El producto de dos ideales primos es primo.
4. Si $\phi\colon A \to B$ es un homomorfismo de anillos y J es un ideal maximal de B, entonces $\phi^{-1}(J)$ es un ideal maximal de A.

Ejercicio 2.- (*2 puntos*) En el anillo $\mathbb{C}[x, y]$ se considera el ideal $I = (f_1, f_2)$ generado por los polinomios $f_1 = x^2 + 2y^2 - 3$ y $f_2 = x^2 + xy + y^2 - 3$. Se pide:
1.- Hallar la base de Gröbner reducida del ideal I para el orden lexicográfico, con $x > y$.
2.- ¿Es $I = (y^2 - xy, 2y^3 - 3y + xy^2)$? Razonar la respuesta.

Ejercicio 3.- (*2 puntos*) Sea $k[\mathbf{X}] = k[X_1, \ldots, X_n]$ con k un cuerpo y X_i indeterminada para cada $i = 1, \ldots, n$. Sea $I \subset k[\mathbf{X}]$ un ideal.

1. Si k es algebraicamente cerrado, probar que son equivalentes:
   a) El conjunto algebraico $\mathcal{V}(I) \subset k^n$ es finito.
   b) Existe un polinomio no nulo $f_i \in I \cap k[X_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

   (Indicación: Considerar un orden lexicográfico para el que X_i sea la menor indeterminada)
2. Verificar con un ejemplo que en el caso en que k no sea algebraicamente cerrado la equivalencia anterior puede no ser cierta.

Ejercicio 4.- (*2 puntos*) Consideramos un cuerpo k y un k-módulo V de rango finito. Sea $\mathrm{End}(V)$ el k-módulo de los homomorfismos de V en V y $\mathcal{M}(n \times m; k)$ el k-módulo de las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes en k.

1. Probar que
$$\varphi : k^n \otimes k^m \longrightarrow \mathcal{M}(n \times m; k),$$
tal que $\varphi((a_1, \ldots, a_n) \otimes (b_1, \ldots, b_m)) = (a_i b_j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, define un isomorfismo de k-módulos.
2. Definir un isomorfismo de k-módulos entre $V \otimes V$ y $\mathrm{End}(V)$.

Ejercicio 5.- (*2 puntos*) Sea M el submódulo de $\mathbb{Z}^4$ generado por $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$:

$$m_1 = (3, 0, -3, 6), \quad m_2 = (0, 6, 6, -9), \quad m_3 = (-3, 6, 3, -15), \quad m_4 = (9, -6, -9, 27).$$

1. Calcular el rango de M.
2. Calcular los factores invariantes del módulo cociente $H = \mathbb{Z}^4/M$.
3. Calcular una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{Z}^4$ y unos enteros a_1, a_2, a_3, a_4 tales que el conjunto de los $a_i e_i$, con $1 \leq i \leq$ rango de M, formen una base de M.