Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- (*2 puntos*) Sea A un anillo. Probar que son equivalentes las siguientes condiciones:
1) Todo ideal primo de A es la intersección de los maximales que lo contienen.
2) $\mathrm{Nil}(A/I) = \mathcal{R}(A/I)$, para todo ideal I de A.

Ejercicio 2.- (*2 puntos*) Sean M, N $A-$módulos, I un ideal de A.
1) Definir una aplicación bilineal $f : M/IM \times N/IN \to (M \otimes N)/I(M \otimes N)$.
2) Usar lo anterior para demostrar que $(M/IM) \otimes (N/IN) \simeq (M \otimes N)/I(M \otimes N)$.

Ejercicio 3.-(*4 puntos*) Sea k un cuerpo infinito **no necesariamente** algebraicamente cerrado. Sea $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n indeterminadas con coeficientes en k.

1. Dar un ejemplo de un ideal $I \subset A$ tal que
$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \neq \sqrt{I}.$$
Razonar la respuesta.
2. Llamaremos *subespacio de coordenadas* a un conjunto algebraico afín de la forma $W = \mathcal{V}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, donde $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$. Probar que
$$\mathcal{I}(W) = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}).$$
(Indicación: Usar el teorema de división para demostrar la inclusión $\subset$)
3. Supongamos que $I \subset A$ es un ideal monomial, es decir, un ideal que admite un sistema de generadores dado por monomios. Equivalentemente, $f \in I$ si y sólo si cada monomio que aparece en f está en I. Probar que:
   a) La intersección de ideales monomiales es monomial.
   b) Las componentes irreducibles de $\mathcal{V}(I)$ son subespacios de coordenadas. (Indicación: Usar inducción en el número de monomios generadores)
   c) $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Ejercicio 4.- (*2 puntos*)

1. Consideremos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
y sea $M' \subset \mathbf{C}[X]^3$ el $\mathbf{C}[X]$-submódulo generado por las filas de la matriz
$$XI - A = \begin{pmatrix} X+4 & -5 & -5 \\ 3 & X-4 & -3 \\ 2 & -2 & X-3 \end{pmatrix}.$$
Se pide
   a) Calcular los factores invariantes de la matriz $XI - A$ (o lo que es lo mismo, del $\mathbf{C}[X]$-módulo finitamente generado $\mathbf{C}[X]^3/M'$).
   b) Dar la forma de Jordan de la matriz A.
2. Describir las representaciones complejas unidimensionales del grupo aditivo de los enteros $\mathbf{Z}$. Analizar cuándo dos de estas representaciones son isomorfas.