ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS **Examen de septiembre** **1-9-2004**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- (*2 puntos*)

1. Sea A un dominio de integridad. Demostrar que $A[[x]]$ es un dominio de integridad y que $f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ es una unidad en $A[[x]]$ si y sólo si a_0 es una unidad en A.
2. Sea k un cuerpo. Probar que $\mathfrak{m} = (x)$ es maximal en $k[[x]]$.
3. Demostrar que $k[[x]]$ es un anillo local.
4. Demostrar que $k[[x]]$ es un dominio de ideales principales.
5. Demostrar que el cuerpo de fracciones de $k[[x]]$ está formado por las expresiones de la forma $\frac{f(x)}{x^m}$ con $f(x) \in k[[x]]$ y $m \in \mathbf{N}$.

Ejercicio 2.- (*2 puntos*)

1.- Sean I_1, I_2 ideales de $k[x_1, \ldots, x_n]$, y sea $J \subset k[T, x_1, \ldots, x_n]$ el ideal

$$J = (T)I_1^e + (1-T)I_2^e.$$

Probar que

$$I_1 \cap I_2 = J \cap k[x_1, \ldots, x_n].$$

2.- Sean los ideales $I_1 = \langle x, y\rangle$ e $I_2 = \langle y^2, z\rangle$ de $\mathbf{C}[x, y, z]$. Calcular, aplicando el apartado anterior, $I_1 \cap I_2$. (**Indicación:** La intersección del anillo $\mathbf{C}[x, y, z]$ con una base de Gröbner de J para el orden lexicográfico con $T > x > y > z$ es un sistema generador del ideal $I_1 \cap I_2$).

Ejercicio 3.- (*2 puntos*)

Sean k un cuerpo, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $k[x_1, \ldots, x_n]$ y el conjunto algebraico $V = \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \subset k^n$.
Se pide:

1. Probar que si k es algebraicamente cerrado, entonces V es irreducible no vacío.
2. Verificar con un ejemplo que si k no es algebraicamente cerrado V puede no ser irreducible.
3. Supongamos que k sea **infinito** (no necesariamente algebraicamente cerrado) y sea r un entero verificando $1 \leq r \leq n$. Para $\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_r)$, probar que V es irreducible. (Indicación: Probar que $\mathcal{I}(V) = \mathfrak{p}$ usando el teorema de división para la inclusión $\subset$)

Ejercicio 4.-(*2 puntos*)

Sean F y K dos cuerpos tales que $F \subset K$. Dado un polinomio $f(X)$ de $F[X]$, consideramos las F-álgebras

$$K \otimes_F \frac{F[X]}{(f(X))} \quad y \quad \frac{K[X]}{(f(X))}.$$

Probar que son isomorfas.

Ejercicio 5.- (*2 puntos*)

En el $\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}[X]$-módulo $\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}[X]^3$, consideramos el submódulo M' generado por $\{a_1, a_2, a_3\}$:

$$a_1 = (X, 1, 2), \quad a_2 = (0, X+6, 4), \quad a_3 = (6, 6, X+5).$$

1. Calcular los factores invariantes del $\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}[X]$-módulo $\frac{\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}[X]^3}{M'}$.
2. Deducir del apartado anterior los autovalores del endomorfismo $f : \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}^3 \to \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}^3$, definido por

$$f(e_1) = (0, 6, 5),\ f(e_2) = (0, 1, 3),\ f(e_3) = (1, 1, 2),$$

con $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}$-espacio vectorial $\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}7}^3$.