Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.- (*3 puntos*) Sea k un cuerpo. Se pide:

1. Si $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in k[x]$ es un polinomio de grado n en la variable x, se define la *homogeneización* f^h de f con respecto a la variable y como el polinomio
$$f^h = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n.$$
Probar que f tiene una raíz en k si y sólo si existe $(a,b) \in k^2$ tal que $(a,b) \neq (0,0)$ y $f^h(a,b) = 0$. (Indicación: Ver que $f^h(a,b) = b^n f^h(\frac{a}{b}, 1)$ si $b \neq 0$.)
2. Si k no es algebraicamente cerrado, probar que para cada $s > 0$ existe $f_s \in k[x_1, \ldots, x_s]$, donde x_i es una variable para cada i, tal que la única solución en k^s de $f_s = 0$ es $(0, \ldots, 0) \in k^s$. (Indicación: Usar el polinomio f^h siendo f un polinomio en k[x] de grado positivo que no tenga raíces en k.)
3. Sea $W = \mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s)$ un conjunto algebraico de k^n, $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ para cada $i = 1, \ldots, s$. Probar que si k no es algebraicamente cerrado, entonces $W = \mathcal{V}(g)$ con $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$. (Indicación: Considerar $f_s(g_1, \ldots, g_s)$.)
4. Dar un contraejemplo donde se vea que en el caso k algebraicamente cerrado no se verifica el apartado anterior.

Ejercicio 2.- (*2 puntos*) En el anillo $\mathbb{C}[x,y,z]$ se considera el ideal $I = (f_1, f_2)$ generado por los polinomios $f_1 = x^2 - yz$ y $f_2 = x^4 - y^5$. Se pide:
1.- Hallar la base de Gröbner reducida del ideal I para el orden lexicográfico, con $x > y > z$.
2.- Sea el polinomio $f = 2x^2yz - y^2z^2 - y^5$. Usando el orden lexicográfico con $x > y > z$, decidir si $f \in I$.

Ejercicio 3.- (*3 puntos*)

1. Probar la igualdad de $\mathbb{Z}$-módulos
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m \otimes \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}mcd(m,n).$$
2. Sean M, N y P módulos sobre un anillo A. Demostrar que existe un isomorfismo canónico
$$(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P).$$
3. Sean los $\mathbb{Z}$-módulos
$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \\ M_2 &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}6. \end{aligned}$$
Expresar $M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$ como suma directa de módulos del tipo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$.

Ejercicio 4.- (*2 puntos*) En el $\mathbb{C}[X]$-módulo $\mathbb{C}[X]^3$, consideramos el submódulo M generado por $\{a_1, a_2, a_3\}$:
$$a_1 = (X-5, 3, 1), \quad a_2 = (-7, X+5, 3), \quad a_3 = (4, -3, X-2).$$

1. Calcular los factores invariantes del módulo cociente $H = \mathbb{C}[X]^3/M$.
2. Calcular los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 7 & -5 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.