ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS **Examen de septiembre** **10-09-2002**

Apellidos **Nombre**

Ejercicio 1.(4 puntos) Sea el polinomio irreducible $f(X) = X^4 + \frac{5}{2}X^2 + 11X + \frac{333}{16} \in \mathbb{Q}[x]$ cuyas raíces son

$$\alpha_1 = -\frac{\sqrt{-11}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{-11}}}{2}, \alpha_2 = -\frac{\sqrt{-11}}{2} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{-11}}}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{-11}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{-11}}}{2}, \alpha_4 = \frac{\sqrt{-11}}{2} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{-11}}}{2}.$$

La resolvente cúbica es

$$g(X) = (1/8)(2x+17)(4x^2 - 44x + 41)$$

que tiene a $-\frac{17}{2}$ como única raíz racional. De otro lado, se considera el polinomio

$$h(X) = (X^2 + (17/2)X + (333/16))(X^2 + 11),$$

como auxiliar para los cálculos. Sea K el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$.

1. Escribir el grupo de Galois de $K : \mathbb{Q}$ como un subgrupo de S_4, para las etiquetas puestas a las raíces de $f(X)$.
2. Determinar generadores de cada una de las extensiones intermedias entre $\mathbb{Q}$ y K.

Ejercicio 2. (3 puntos) Este ejercicio consta de tres apartados independientes.

A) Sea ϵ es una raíz primitiva séptima de la unidad. Estudiar el grupo de Galois de $[\mathbb{Q}[\epsilon] : \mathbb{Q}]$, y establecer la correspondencia de Galois.

B) Demuéstrese que el polinomio $p(X) = X^3 + X + 1$ es irreducible en $\mathbf{F}_2[X]$. Si denotamos por α una de las raíces de $p(X)$, dar las otras dos raíces en función de α.

C) Calcular el polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ de $\sqrt[n]{2}$. ¿Es finita la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots]$? ¿por qué?

Ejercicio 3. (3 puntos) Este ejercicio consta de cuatro apartados independientes.

A) Dado un anillo A y un A-módulo M, definimos sobre el conjunto $A \times M$ la siguiente operación interna

$$(a, m) \cdot (b, n) = (ab, an + bm), \quad a, b \in A, m, n \in M.$$

Probar que el conjunto $A \times M$ dotado de la $+$ $((a, m) + (b, n) = (a + b, m + n))$ y de la operación interna $\cdot$ anterior es un anillo.

Definir un homomorfismo sobreyectivo de anillos $A \times M \to A$.

B) Sea A un DIP y $p \in A$ un elemento irreducible. Probar que los A-módulos $A/(p) \times A/(p)$ y $A/(p^2)$ no son isomorfos.

C) Probar que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5 = 0$.

D) Probar que todo ideal maximal de un anillo es primo.